Probabilidad
Examen VIII

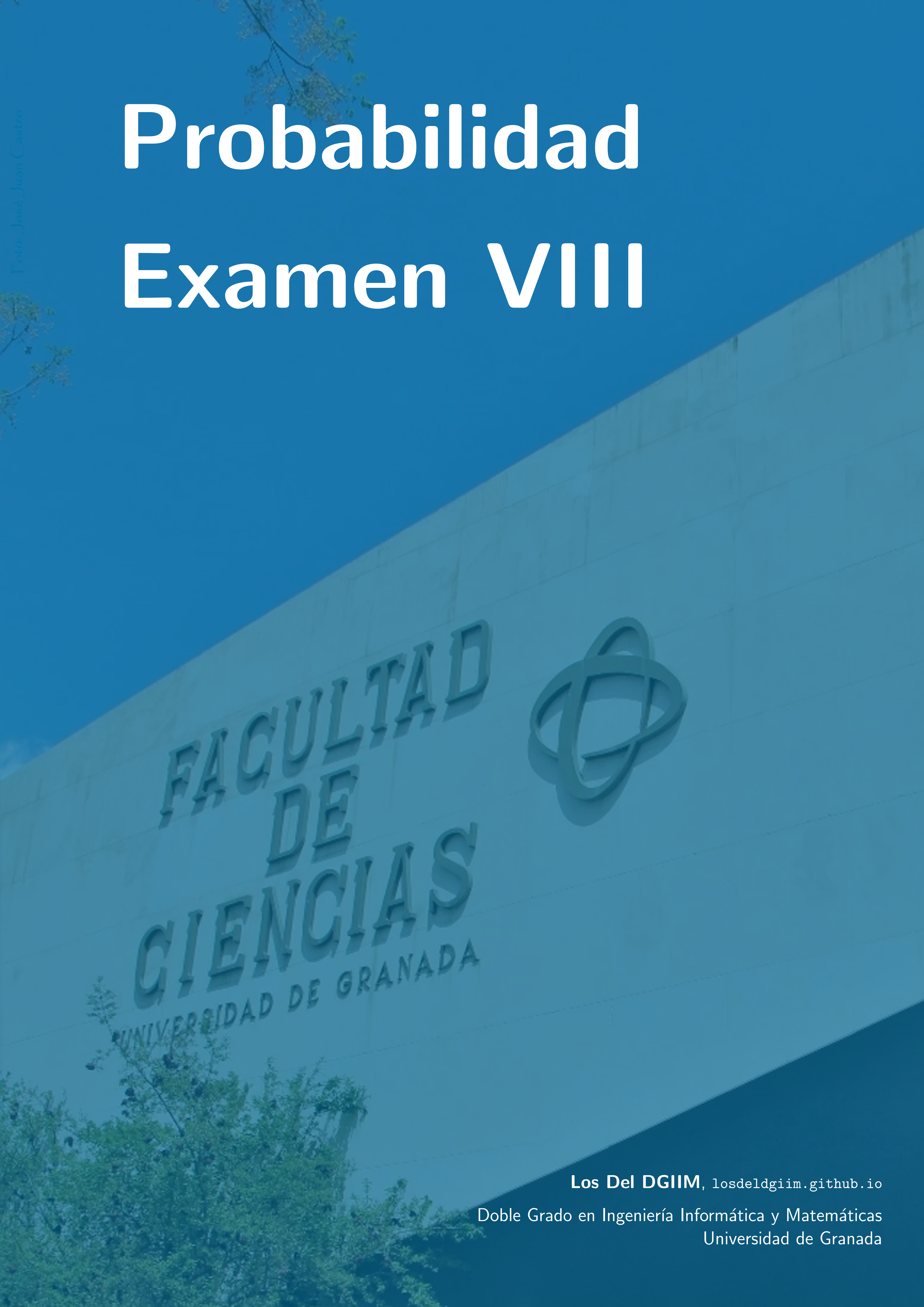

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Francisco Javier Esquivel Sánchez.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 13 de enero de 2025.

Duración 2 horas y media.

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Deduzca razonadamente la expresión de la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X que sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, sabiendo que la función generatriz de momentos de la variable Z, que sigue una distribución $N(0, 1)$ es:

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** En una feria hay un juego en una caseta que consiste en tirar una moneda y un dado, suponemos que ambos son perfectos y que son sucesos independientes, de forma que las caras de la moneda están numeradas con un 1 y un 3 y que el dado tiene 4 caras, numeradas del 1 al 4. El amable feriante nos da un ticket con el que podremos conseguir premios, siempre y cuando la suma de los números que aparecen en el dado y en la moneda sumen estrictamente más que 5. Si un niñito quiere conseguir un premio que requiere de 10 tickets, ¿cuál será el número mínimo de lanzamientos de moneda y dado que deberemos realizar para conseguir esos 10 tickets con una probabilidad superior a 0.9495? (Sabiendo que $P[Z \geqslant 1{,}6] = 0{,}9495$, con Z una variable aleatoria que sigue una $N(0, 1)$). Consideramos que se puede realizar un número indefinido de lanzamientos, así como que estos son independientes entre sí.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Consideramos un vector aleatorio continuo (X, Y) con función de densidad:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) **(2 puntos)** Obtener la función de distribución del vector (X, Y).

b) **(1 punto)** Obtener las funciones de densidad de las distribuciones marginales y condicionadas.

c) **(1 punto)** Calcular al función de densidad del vector aleatorio (U, V), con $U = X + Y$ y $V = X - Y$.

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Consideramos un vector aleatorio continuo (X, Y) con función de densidad:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 < x + y \ \wedge \ 0 < y < 1 \ \wedge \ x < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación. Notemos que la función $f_{(X,Y)}$ **no es una función de densidad**, ya que $\int_{\mathbb{R}^2} f < 1$. Sin embargo, consideraremos que sí lo es, ya que es la modificación de una función de densidad para que las cuentas salgan de forma más fácil, sin variar la dificultad del ejercicio.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la curva de regresión de X sobre Y.

b) **(1 punto)** ¿Cuál es la aproximación que obtenemos de X si Y toma el valor $1/2$? Calcule un promedio del error cometido en la aproximación.

c) **(0.75 puntos)** Calcule en promedio el error obtenido en general por dicha curva de regresión.