Probabilidad Examen II

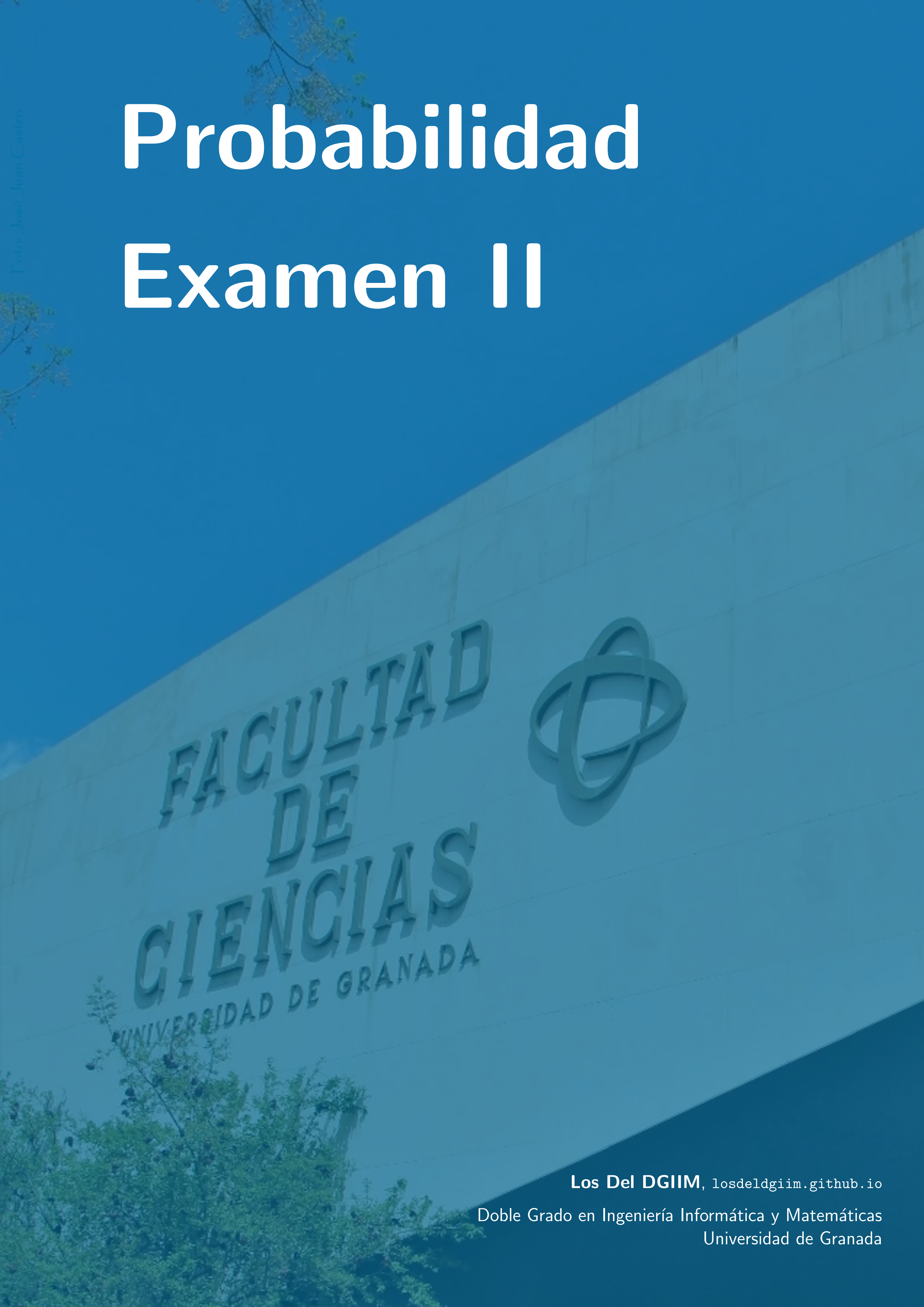


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad
Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Francisco Javier Esquivel Sánchez.

Descripción Parcial de los Temas 1 y 2.1.

Fecha 22 de octubre de 2024.

Duración 50 minutos.

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Calcular razonadamente la función generatriz de momentos de una variable aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$. Recordemos que la funsión de densidad de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Este ejercicio está demostrado en la Teoría. La función generatriz de momentos de una variable aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$ es:

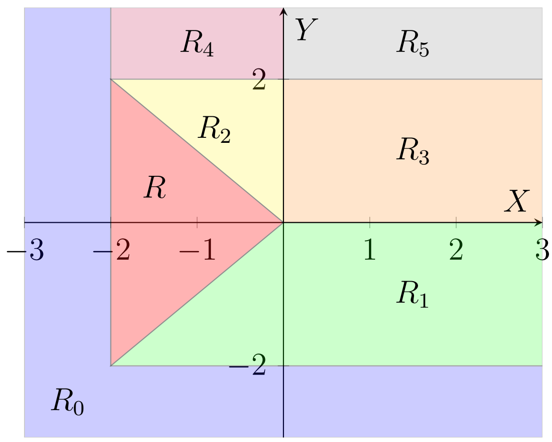
$$M_X(t) = e^{t^2/2}$$

Ejercicio 2. Dado el vector bidimensional (X,Y) distribuido uniformemente en el recinto limitado

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leqslant x \leqslant y \leqslant -x\}$$

1. (1 punto) Obtener su función de densidad conjunta.

   Representamos en primer lugar dicho conjunto:



   Tenemos que, para $x \in [-2,0]$ y $y \in [x,-x]$, la función de densidad conjunta es:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = k, \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

   Para que sea una función de densidad, hemos de tener que:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f = \int_R f = \int_R k$$

   Tenemos dos opciones:

   Integración Normal:

$$1 = \int_R k = \int_{-2}^{0}\int_{x}^{-x} k\,dy\,dx = \int_{-2}^{0} k(-2x)\,dx =$$
$$= -2k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = -2k\,[0-2] = 4k \Longrightarrow k = \frac{1}{4}$$

Razonando según la Forma de R:

$$1 = \int_R k = k\lambda(R) = k \cdot \frac{4 \cdot 2}{2} = 4k \Longrightarrow k = \frac{1}{4}$$

En cualquier caso, para el valor de $k = 1/4$, la función de densidad conjunta integrable, no negativa e integra 1.

2. (6,5 puntos) Obtener su función de distribución conjunta.

   Distinguimos casos:

   - Si $x < -2$ o $y < -2$ (Zona R_0):

   $$F_{(X,Y)}(x,y) \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\, dv\, du = 0$$

   - Si $x \in [-2, 0]$ y $y \in [x, -x]$ (Zona R):

   $$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\, dv\, du = \int_{-2}^{x} \int_{u}^{y} \frac{1}{4}\, dv\, du = \\ &= \int_{-2}^{x} \frac{1}{4}(y-u)\, du = \frac{1}{4}\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{4}\left[yx - \frac{x^2}{2} + 2y + 2\right] \end{aligned}$$

   - Si $y < 0$ y $x > y$ (Zona R_1):

   $$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\, dv\, du = \int_{-2}^{y} \int_{u}^{y} \frac{1}{4}\, dv\, du = \\ &= \int_{-2}^{y} \frac{1}{4}(y-u)\, du = \frac{1}{4}\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{y} = \frac{1}{4}\left[y^2 - \frac{y^2}{2} + 2y + 2\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2} + 2y + 2\right] \end{aligned}$$

   - Si $x \in [-2, 0]$ y $y \in [-x, 2]$ (Zona R_2):

   $$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\, dv\, du = \int_{-2}^{-y} \int_{u}^{y} \frac{1}{4}\, dv\, du + \int_{-y}^{x} \int_{u}^{-u} \frac{1}{4}\, dv\, du = \\ &= \int_{-2}^{-y} \frac{1}{4}(y-u)\, du + \int_{-y}^{x} \frac{1}{4}(-2u)\, du = \frac{1}{4}\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{-y} + \frac{1}{4}\left[-u^2\right]_{-y}^{x} = \\ &= \frac{1}{4}\left[\cancel{y(-y)} - \frac{(-y)^2}{2} + 2y + 2\right] + \frac{1}{4}\left[-x^2 + \cancel{y^2}\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[2y + 2 - \frac{y^2}{2} - x^2\right] \end{aligned}$$

- Si $y \in [0,2]$ y $x \geqslant 0$ (Zona R_3):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = \int_{-2}^{-y}\int_{u}^{y}\frac{1}{4}\,dv\,du + \int_{-y}^{0}\int_{u}^{-u}\frac{1}{4}\,dv\,du = \\
&= \int_{-2}^{-y}\frac{1}{4}(y-u)\,du + \int_{-y}^{0}\frac{1}{4}(-2u)\,du = \frac{1}{4}\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{-y} + \frac{1}{4}\left[-u^2\right]_{-y}^{0} = \\
&= \frac{1}{4}\left[\cancel{y(-y)} - \frac{(-y)^2}{2} + 2y + 2\right] + \frac{1}{4}\left[0 - \cancel{y^2}\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left[2y + 2 - \frac{y^2}{2}\right]
\end{aligned}$$

- Si $x \in [-2,0]$ y $y \geqslant 2$ (Zona R_4):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = \int_{-2}^{x}\int_{u}^{-u}\frac{1}{4}\,dv\,du = \\
&= \int_{-2}^{x}\frac{1}{4}(-2u)\,du = \frac{1}{4}\left[-u^2\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{4}\left[-x^2+4\right]
\end{aligned}$$

- Si $x \geqslant 0, y \geqslant 2$ (Zona R_5):

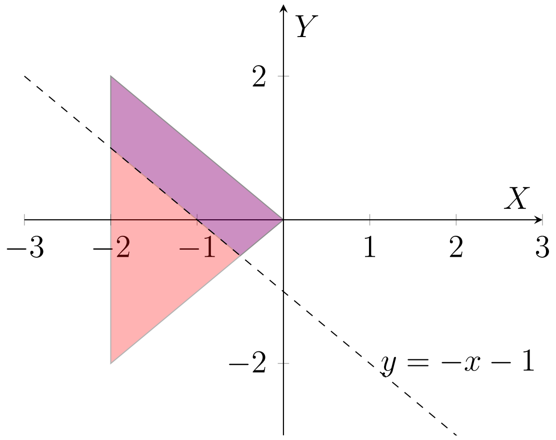
$$F_{(X,Y)}(x,y) = 1$$

Por tanto, la función de distribución conjunta es:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases}
0 & \text{si } x < -2 \text{ o } y < -2 \\
\frac{1}{4}\left[yx - \frac{x^2}{2} + 2y + 2\right] & \text{si } x \in [-2,0] \text{ y } y \in [x,-x] \\
\frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2} + 2y + 2\right] & \text{si } y < 0 \text{ y } x > y \\
\frac{1}{4}\left[2y + 2 - \frac{y^2}{2} - x^2\right] & \text{si } x \in [-2,0] \text{ y } y \in [-x,2] \\
\frac{1}{4}\left[2y + 2 - \frac{y^2}{2}\right] & \text{si } y \in [0,2] \text{ y } x \geqslant 0 \\
\frac{1}{4}\left[-x^2+4\right] & \text{si } x \in [-2,0] \text{ y } y \geqslant 2 \\
1 & \text{si } x \geqslant 0, y \geqslant 2
\end{cases}$$

3. (1,5 puntos) Obtener la probabilidad de que $X + Y + 1 \geqslant 0$.

   Veamos qué conjunto representa $X + Y + 1 \geqslant 0$:



Tenemos por tanto que:

$$
\begin{aligned}
P[X+Y+1 \geqslant 0] &= \int_{-2}^{-1/2} \int_{-x-1}^{-x} \frac{1}{4}\, dy\, dx + \int_{-1/2}^{0} \int_{x}^{-x} \frac{1}{4}\, dy\, dx = \\
&= \int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{4}(-x+1+x)\, dx + \int_{-1/2}^{0} \frac{1}{4}(-2x)\, dx = \\
&= \int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{4}\, dx + \int_{-1/2}^{0} -\frac{1}{2} x\, dx = \\
&= \frac{1}{4}\left[x\right]_{-2}^{-1/2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{0} = \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{2}+2\right] - \frac{1}{2}\left[0 - \frac{1}{8}\right] = \frac{7}{16}
\end{aligned}
$$

Observación. Notamos que este ejercicio fue repetido de exámenes de otros años.