Probabilidad
Examen I

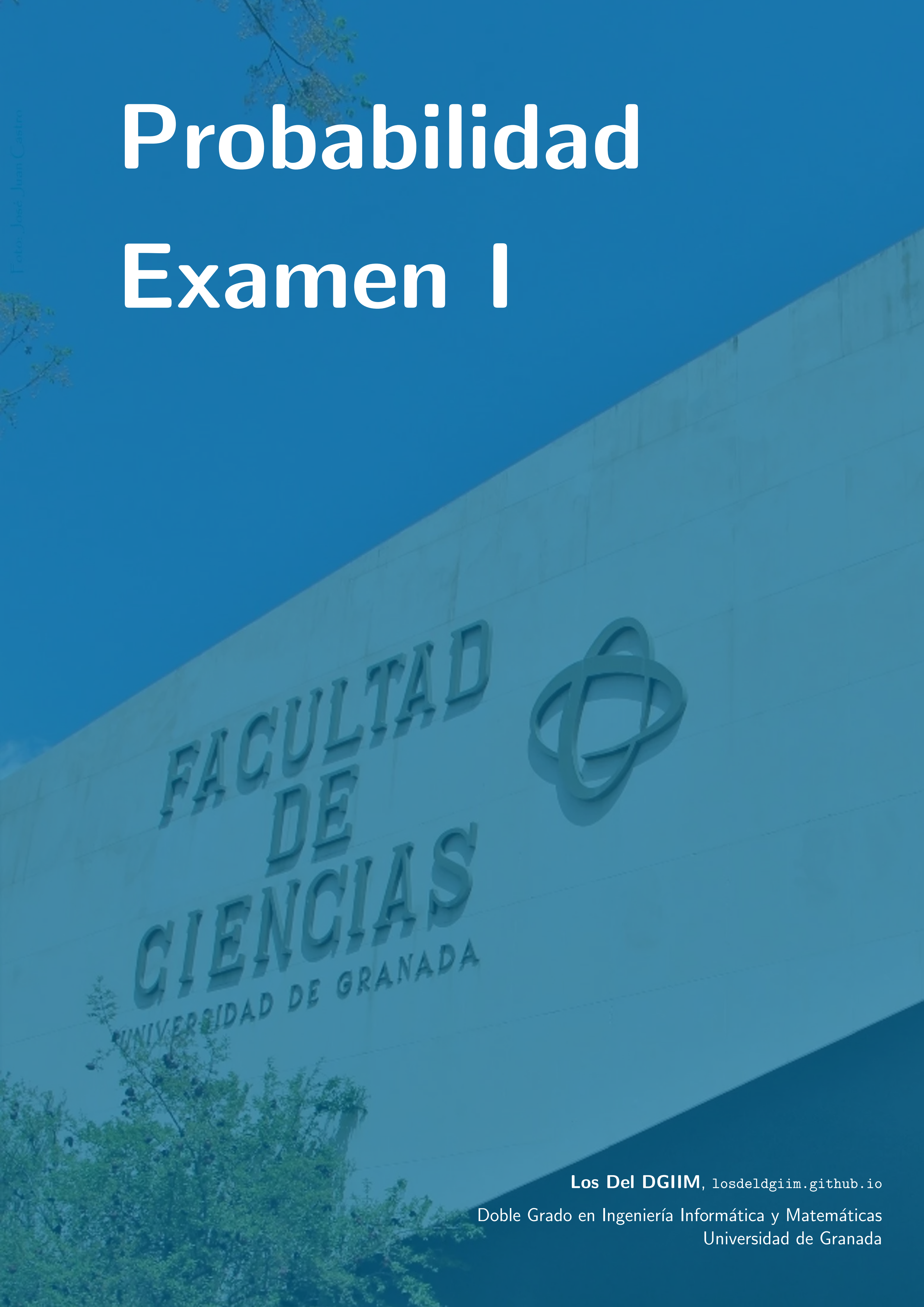


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Parcial de los Temas 1 y 2.1.

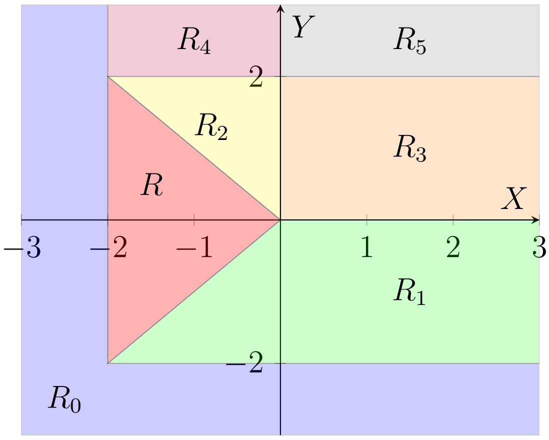
Fecha 8 de noviembre de 2021.

Ejercicio 1. Dado el vector bidimensional (X, Y) distribuido uniformemente en el recinto limitado

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leqslant x \leqslant y \leqslant -x\}$$

1. (0,5 puntos) Obtener su función de densidad conjunta.

   Representamos en primer lugar dicho conjunto:



   Tenemos que, para $x \in [-2, 0]$ y $y \in [x, -x]$, la función de densidad conjunta es:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = k, \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

   Para que sea una función de densidad, hemos de tener que:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f = \int_R f = \int_R k$$

   Tenemos dos opciones:

   Integración Normal:

$$1 = \int_R k = \int_{-2}^{0} \int_x^{-x} k \, dy \, dx = \int_{-2}^{0} k(-2x) \, dx =$$
$$= -2k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{0} = -2k \, [0 - 2] = 4k \Longrightarrow k = \frac{1}{4}$$

   Razonando según la Forma de R:

$$1 = \int_R k = k\lambda(R) = k \cdot \frac{4 \cdot 2}{2} = 4k \Longrightarrow k = \frac{1}{4}$$

   En cualquier caso, para el valor de $k = 1/4$, la función de densidad conjunta es integrable, no negativa e integra 1.

2. (1,5 puntos) Obtener su función de distribución conjunta.

   Distinguimos casos:

- Si $x < -2$ o $y < -2$ (Zona R_0):

$$F_{(X,Y)}(x,y) \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = 0$$

- Si $x \in [-2,0]$ y $y \in [x,-x]$ (Zona R):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = \int_{-2}^{x}\int_{u}^{y} \frac{1}{4}\,dv\,du = \\ &= \int_{-2}^{x} \frac{1}{4}(y-u)\,du = \frac{1}{4}\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{4}\left[yx - \frac{x^2}{2} + 2y + 2\right] \end{aligned}$$

- Si $y < 0$ y $x > y$ (Zona R_1):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = \int_{-2}^{y}\int_{u}^{y} \frac{1}{4}\,dv\,du = \\ &= \int_{-2}^{y} \frac{1}{4}(y-u)\,du = \frac{1}{4}\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{y} = \frac{1}{4}\left[y^2 - \frac{y^2}{2} + 2y + 2\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2} + 2y + 2\right] \end{aligned}$$

- Si $x \in [-2,0]$ y $y \in [-x,2]$ (Zona R_2):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = \int_{-2}^{-y}\int_{u}^{y} \frac{1}{4}\,dv\,du + \int_{-y}^{x}\int_{u}^{-u} \frac{1}{4}\,dv\,du = \\ &= \int_{-2}^{-y} \frac{1}{4}(y-u)\,du + \int_{-y}^{x} \frac{1}{4}(-2u)\,du = \frac{1}{4}\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{-y} + \frac{1}{4}\left[-u^2\right]_{-y}^{x} = \\ &= \frac{1}{4}\left[\cancel{y(-y)} - \frac{(-y)^2}{2} + 2y + 2\right] + \frac{1}{4}\left[-x^2 + \cancel{y^2}\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[2y + 2 - \frac{y^2}{2} - x^2\right] \end{aligned}$$

- Si $y \in [0,2]$ y $x \geqslant 0$ (Zona R_3):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = \int_{-2}^{-y}\int_{u}^{y} \frac{1}{4}\,dv\,du + \int_{-y}^{0}\int_{u}^{-u} \frac{1}{4}\,dv\,du = \\ &= \int_{-2}^{-y} \frac{1}{4}(y-u)\,du + \int_{-y}^{0} \frac{1}{4}(-2u)\,du = \frac{1}{4}\left[yu - \frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{-y} + \frac{1}{4}\left[-u^2\right]_{-y}^{0} = \\ &= \frac{1}{4}\left[\cancel{y(-y)} - \frac{(-y)^2}{2} + 2y + 2\right] + \frac{1}{4}\left[0 - \cancel{y^2}\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[2y + 2 - \frac{y^2}{2}\right] \end{aligned}$$

- Si $x \in [-2,0]$ y $y \geqslant 2$ (Zona R_4):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = \int_{-2}^{x}\int_{u}^{-u} \frac{1}{4}\,dv\,du = \\ &= \int_{-2}^{x} \frac{1}{4}(-2u)\,du = \frac{1}{4}\left[-u^2\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{4}\left[-x^2 + 4\right] \end{aligned}$$

- Si $x \geqslant 0, y \geqslant 2$ (Zona R_5):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = 1$$

Por tanto, la función de distribución conjunta es:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \text{ o } y < -2 \\ \frac{1}{4}\left[yx - \frac{x^2}{2} + 2y + 2\right] & \text{si } x \in [-2,0] \text{ y } y \in [x,-x] \\ \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2} + 2y + 2\right] & \text{si } y < 0 \text{ y } x > y \\ \frac{1}{4}\left[2y + 2 - \frac{y^2}{2} - x^2\right] & \text{si } x \in [-2,0] \text{ y } y \in [-x,2] \\ \frac{1}{4}\left[2y + 2 - \frac{y^2}{2}\right] & \text{si } y \in [0,2] \text{ y } x \geqslant 0 \\ \frac{1}{4}\left[-x^2 + 4\right] & \text{si } x \in [-2,0] \text{ y } y \geqslant 2 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0, y \geqslant 2 \end{cases}$$

3. (1 punto) Obtener las dos distribuciones condicionadas posibles.

   En primer lugar, hemos de obtener las funciones de densidad marginales. Respecto de X, tenemos:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_x^{-x} \frac{1}{4}\,dy = \frac{1}{4}(-x-x) = -\frac{x}{2} \qquad x \in [-2,0]$$

   Respecto de Y, tenemos:

$$f_Y(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_{-2}^{y} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}(y+2) & \text{si } y \in [-2,0] \\ \displaystyle\int_{-2}^{-y} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}(-y+2) & \text{si } y \in [0,2] \end{array} \right\} = \left\{ \frac{1}{4}(-|y|+2) \qquad y \in [-2,2] \right.$$

   Por tanto, fijado $y^* \in [-2,2]$, la función de densidad condicionada de X es:

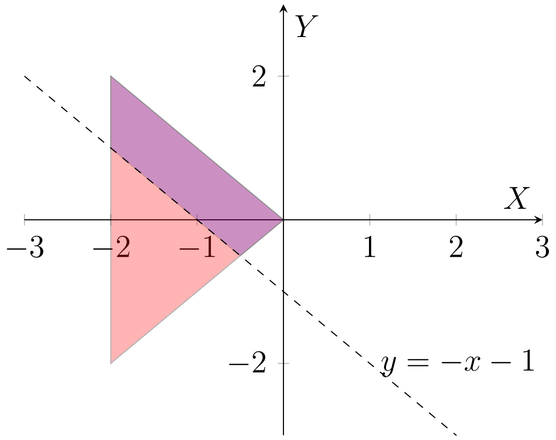
$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{1/4}{1/4(-|y^*|+2)} = \frac{1}{-|y^*|+2} \qquad x \in [-2, -|y^*|]$$

   Por otro lado, fijado $x^* \in [-2,0]$, la función de densidad condicionada de Y es:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \frac{1/4}{-x^*/2} = -\frac{1}{2x^*} \qquad y \in [x^*, -x^*]$$

4. (0,5 puntos) Obtener la probabilidad de que $X + Y + 1 \geqslant 0$.

   Veamos qué conjunto representa $X + Y + 1 \geqslant 0$:



Tenemos por tanto que:

$$
\begin{aligned}
P[X+Y+1 \geqslant 0] &= \int_{-2}^{-1/2} \int_{-x-1}^{-x} \frac{1}{4}\,dy\,dx + \int_{-1/2}^{0} \int_{x}^{-x} \frac{1}{4}\,dy\,dx = \\
&= \int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{4}(-x+1+x)\,dx + \int_{-1/2}^{0} \frac{1}{4}(-2x)\,dx = \\
&= \int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{4}\,dx + \int_{-1/2}^{0} -\frac{1}{2}x\,dx = \\
&= \frac{1}{4}\left[x\right]_{-2}^{-1/2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{0} = \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{2}+2\right] - \frac{1}{2}\left[0-\frac{1}{8}\right] = \frac{7}{16}
\end{aligned}
$$

5. (1,5 puntos) Obtener la distribución marginal de $Z = X + Y$.

Definimos la transformación:

$$
\begin{array}{rccc}
g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & (X,Y) & \longmapsto & (Z,T) = (X+Y, Y)
\end{array}
$$

Para obtener g^{-1}, buscamos despejar (X,Y) en función de (Z,T):

$$
\left\{ \begin{array}{l} Z = X+Y \\ T = Y \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = Z-T \\ Y = T \end{array} \right\}
$$

Por tanto, la inversa es:

$$
\begin{array}{rccc}
g^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & (Z,T) & \longmapsto & (X,Y) = (Z-T, T)
\end{array}
$$

Tenemos que todas las componentes de g^{-1} son derivables:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial X}{\partial Z}(Z,T) = 1, & \dfrac{\partial X}{\partial T}(Z,T) = -1, \\
\dfrac{\partial Y}{\partial Z}(Z,T) = 0, & \dfrac{\partial Y}{\partial T}(Z,T) = 1.
\end{array}
$$

Además, tenemos que:

$$\det Jg^{-1}(z,t) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \forall (z,t) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, $g(X,Y)$ es un vector aleatorio. Su función de densidad conjunta es:

$$f_{(Z,T)}(z,t) = f_{(X,Y)}(z-t,t) \cdot |Jg^{-1}(z,t)| = f_{(X,Y)}(z-t,t) = \frac{1}{4} \qquad (z-t,t) \in R$$

Veamos cuál es este conjunto:

$$(z-t,t) \in R \iff -2 \leqslant z-t \leqslant t \leqslant -z+t$$

Gráficamente, lo vemos en la Figura 1.

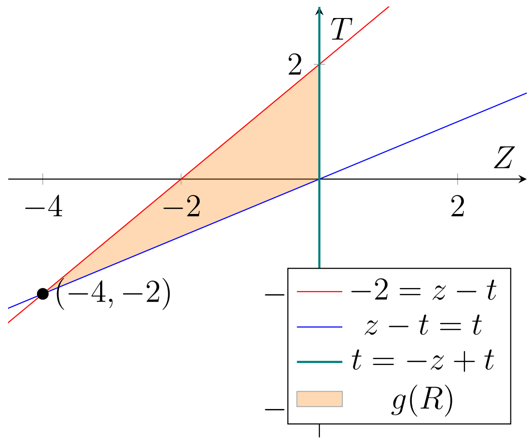


Figura 1: Conjunto $g(R) = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (z-t,t) \in R\}$.

Por tanto, la marginal de Z es, para cada $z \in [-4,0]$:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(Z,T)}(z,t)\,dt = \int_{z/2}^{z+2} \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\,[t]_{z/2}^{z+2} = \frac{1}{4}\left[z+2-\frac{z}{2}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{z}{2}+2\right]$$

Por tanto, la función de densidad marginal de $Z = X+Y$ es:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[\frac{z}{2}+2\right] & \text{si } z \in [-4,0] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 2. Dado el vector bidimensional (X,Y) con la siguiente función masa de probabilidad conjunta:

$X \backslash Y$	0	1	2
1	$1/4$	0	0
2	0	$1/4$	0
3	$1/4$	0	$1/4$

1. (1 punto) Obtener la distribución condicionada de la variable aleatoria Y a todos los posibles valores de la variable aleatoria X.

   Tenemos que:

   $$P[X=1] = 1/4, \qquad P[X=2] = 1/4, \qquad P[X=3] = 1/2$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$P[Y=y|X=1] = \begin{cases} 1/4 & \text{si } y=0 \\ 0 & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$
   $$P[Y=y|X=2] = \begin{cases} 1/4 & \text{si } y=1 \\ 0 & \text{si } y \neq 1 \end{cases}$$
   $$P[Y=y|X=3] = \begin{cases} 1/2 & \text{si } y=0,2 \\ 0 & \text{si } y = 1 \end{cases}$$

2. (1,5 puntos) Obtener la función masa de probabilidad conjunta del vector $(X+Y, X-Y)$.

   Definimos la transformación:

   $$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (X,Y) & \longmapsto & (Z,T) = (X+Y, X-Y) \end{array}$$

   Para obtener g^{-1}, buscamos despejar (X,Y) en función de (Z,T):

   $$\left\{ \begin{array}{c} Z = X+Y \\ T = X-Y \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X = \dfrac{Z+T}{2} \\ Y = \dfrac{Z-T}{2} \end{array} \right\}$$

   Por tanto, la inversa es:

   $$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (Z,T) & \longmapsto & (X,Y) = \left(\dfrac{Z+T}{2}, \dfrac{Z-T}{2}\right) \end{array}$$

   Como X toma valores en $E_X = \{1,2,3\}$ y Y en $E_Y = \{0,1,2\}$, tenemos que:

   $$E_Z = \{1,2,3,4,5\}, \qquad E_T = \{-1,0,1,2,3\}$$

   Tenemos por tanto que:

   $$P[(Z,T) = (z,t)] = P[(X,Y) = g^{-1}(z,t)] \qquad \text{si } g^{-1}(z,t) \in E_X \times E_Y$$

   Por tanto, la función masa de probabilidad conjunta de (Z,T) es:

$Z\backslash T$	-1	0	1	2	3
1	0	0	1/4	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	1/4	0	1/4
4	0	0	0	0	0
5	0	0	1/4	0	0

3. (0,5 puntos) A partir de la función masa de probabilidad marginal de $X+Y$, obtener $P[X+Y \leqslant 4]$.

   La marginal de $Z = X+Y$ es:

   $$\begin{aligned} P[Z=1] &= 1/4 \\ P[Z=2] &= 0 \\ P[Z=3] &= 1/2 \\ P[Z=4] &= 0 \\ P[Z=5] &= 1/4 \end{aligned}$$

   Por tanto, la probabilidad de que $X+Y \leqslant 4$ es:

   $$P[X+Y \leqslant 4] = P[Z=1] + P[Z=2] + P[Z=3] + P[Z=4] = \frac{3}{4}$$

Ejercicio 3. Realizar los siguientes apartados:

1. (1 punto) Deducir de forma razonada la función generatriz de momentos de una distribución Gamma. ¿Está definida para todos los números reales?

   En Teoría, se ha demostrado que la función generatriz de momentos de una distribución Gamma es:

   $$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u \qquad t < \lambda$$

2. (1 punto) A partir de la expresión de la función generatriz de momentos anterior obtener el momento de orden 2 centrado en la media.

   Tenemos que nos están pidiendo el momento de orden 2 centrado en la media, es decir, la varianza. En Teoría, se ha demostrado que esta es:

   $$\mathrm{Var}[X] = \frac{u}{\lambda^2}$$