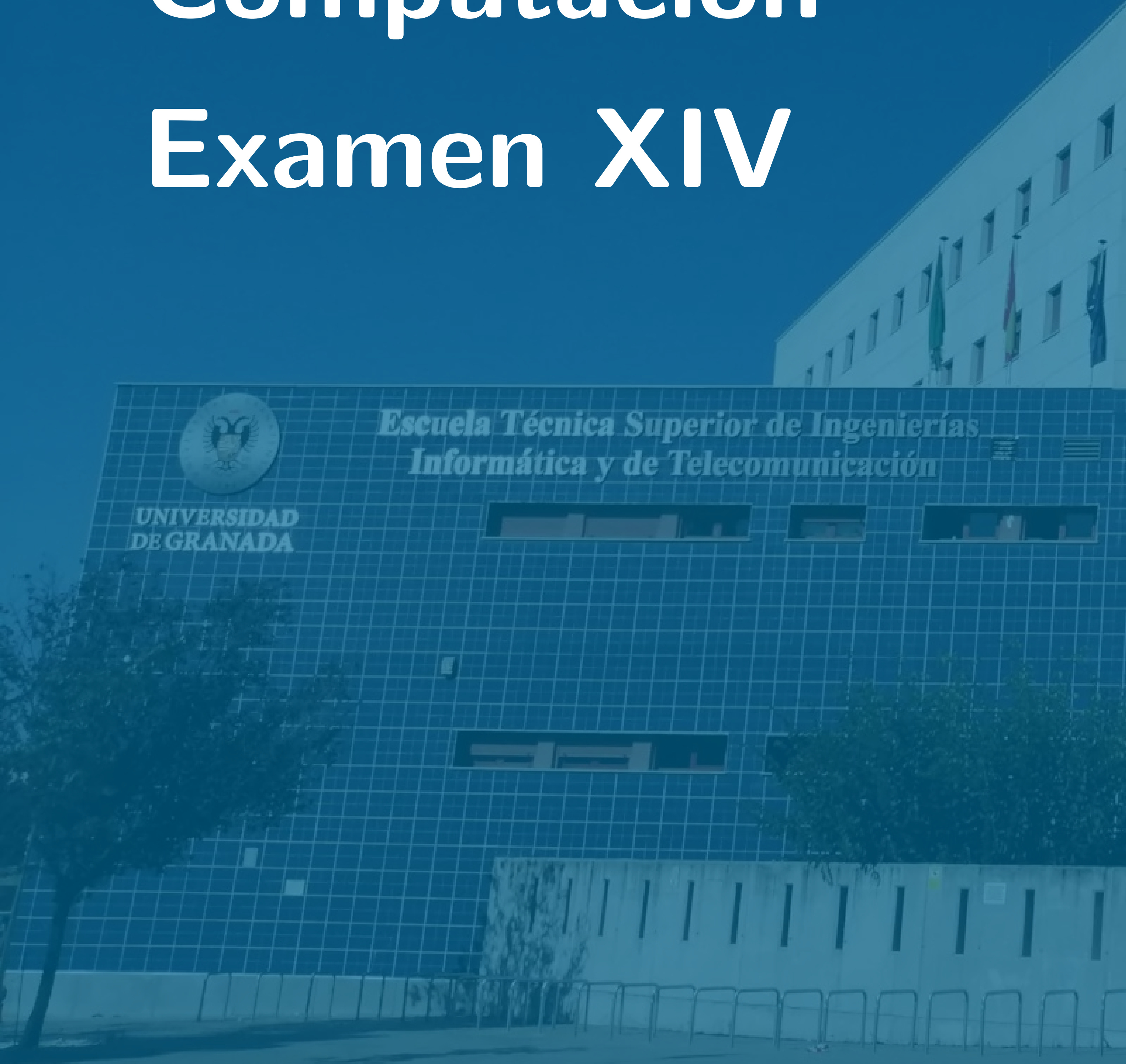
Modelos de Computación Examen XIV



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos de Computación Examen XIV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Modelos de Computación

Curso Académico 2019-20.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas o ADE.

Grupo Único.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 10 de enero de 2020.

Duración 2,5 horas.

Ejercicio 1 (2.5 puntos). Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. La transformación que en cada palabra $u \in \{0,1\}^*$ intercambia los ceros por unos y viceversa es un homomorfismo.
2. Si r_1 y r_2 son expresiones regulares, entonces siempre $(r_1^* + r_2^*)^+ = (r_1 + r_2)^+$.
3. Para que un lenguaje independiente del contexto L sea determinista es necesario que cumpla la propiedad prefijo.
4. El lenguaje $L = \{0^i 1^j 0^i 1^j : i, j \geqslant 1\}$ es independiente del contexto.
5. Si el complementario de un lenguaje es finito, entonces el lenguaje es regular.
6. Si un lenguaje L es regular, entonces el lenguaje L^{-1} es también regular.
7. Si $rr = r$ y ε está en el lenguaje de r, entonces $r^* = r$.
8. Si un AFD tiene n estados y acepta una palabra de longitud n, entonces el lenguaje aceptado es infinito.
9. Si un autómata finito no tiene una pareja de estados indistinguibles, entonces es siempre minimal.
10. Una palabra generada por una gramática independiente del contexto tiene siempre una única derivación por la izquierda.
11. Para aplicar el algoritmo para pasar una gramática a forma normal de Greibach es necesario que la gramática ya esté en forma normal de Chomsky.
12. Si en una gramática independiente del contexto las únicas posibles derivaciones de A son $A \to ACD$ y $A \to aD$, entonces si se aplica la función ELIMINA$_2$ del algoritmo de Greibach, tenemos que añadir una nueva variable B_A, resultando en una gramática en la que la única derivación de A es $A \to aDB_A$.
13. Si una gramática está en forma normal de Greibach, entonces una palabra de longitud n se deriva siempre en $n+1$ pasos.
14. Si al aplicar el algoritmo de Early, tenemos que $\texttt{REGISTROS}[j] = \emptyset$ después de aplicar el paso de avance para este valor de j, entonces la palabra no es generada por la gramática.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Construir un autómata finito determinista minimal que acepte el conjunto de palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ tales que la diferencia entre el número de 0's y el número de 1's es múltiplo de 3. Construir una expresión regular para ese mismo lenguaje usando cualquiera de los procedimientos vistos en clase.

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Sea la gramática independiente del contexto:

$$S \to aSb \mid bY \mid Ya,$$
$$Y \to bY \mid aY \mid a \mid b.$$

Determina usando el algoritmo de Early si las siguientes palabras son generadas: $aabb$, $abbb$.

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Determinar si los siguientes lenguajes son regulares y/o independientes del contexto. Justifica las respuestas.

1. El lenguaje complementario del generado por la gramática del ejercicio anterior.

2. El lenguaje sobre el alfabeto $\{0, 1, 2, 3\}$ de las palabras en las que el número de 0's es igual al número de 1's y el número de 2's es igual al número de 3's.

3. Palabras sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ que comienzan y terminan con el mismo símbolo.

4. Palabras $u \in \{0, 1\}^*$ tales que si $|u| \leqslant 100$, entonces u es un palíndromo y si $|u| \geqslant 50$, entonces no contiene la subcadena 0110.

Ejercicio 5 (1 punto)**.**

Observación. Este ejercicio es voluntario y sirve para subir un punto adicional en la parte de teoría.

Si L es un lenguaje, entonces se define NOPREFIJO(L) como el lenguaje de palabras $u \in L$ tales que ningún prefijo propio de u está en L y NOEXTENSION(L) como la clase de palabras $u \in L$ tales que u no es un prefijo propio de cualquier otra palabra de L. Demostrar que la clase de lenguajes independientes del contexto no es cerrada por las transformaciones NOPREFIJO y NOEXTENSION.

Soluciones

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. La transformación que en cada palabra $u \in \{0,1\}^*$ intercambia los ceros por unos y viceversa es un homomorfismo.

   Sí, es un homomorfismo dado por:
   $$h(0) = 1, \quad h(1) = 0.$$

2. Si r_1 y r_2 son expresiones regulares, entonces siempre $(r_1^* + r_2^*)^+ = (r_1 + r_2)^+$.

   Sean L_1 y L_2 los lenguajes generados asociados a r_1 y r_2 respectivamente. Entonces, tan solo será verdad si $\varepsilon \in L_1 \cup L_2$.

3. Para que un lenguaje independiente del contexto L sea determinista es necesario que cumpla la propiedad prefijo.

   No, no es necesario. No podrá ser aceptado por un APD por el criterio de pila vacía, pero sí será aceptado por un APD por el criterio de estados finales. Por ejemplo, el lenguaje:
   $$L = \{a^i b^j \mid i > j \geqslant 1\}$$
   Este lenguaje no cumple la propiedad prefijo, ya que $a^3b^2, a^3b \in L$. No obstante, es determinista.

4. El lenguaje $L = \{0^i 1^j 0^i 1^j : i, j \geqslant 1\}$ es independiente del contexto.

   Falso, no es independiente del contexto, y se puede demostrar con el lema de bombeo considerando la palabra $0^n 1^n 0^n 1^n$.

5. Si el complementario de un lenguaje es finito, entonces el lenguaje es regular.

   Sí. Sea L un lenguaje y $\overline{L}$ su complementario. Si $\overline{L}$ es finito, entonces $\overline{L}$ es regular. Por tanto, como los lenguajes regulares son cerrados por complemento, entonces $L = \overline{\overline{L}}$ es regular.

6. Si un lenguaje L es regular, entonces el lenguaje L^{-1} es también regular.

   Sí. Si L es regular, entonces L^{-1} es regular, ya que los lenguajes regulares son cerrados por inversión. Se puede demostrar invirtiendo el autómata e intercambiando los estados finales por iniciales y viceversa. Si el primero tenía más de un estado final, entonces se añade un nuevo estado inicial que, mediante transiciones nulas, llega a los antiguos estados finales.

7. Si $rr = r$ y ε está en el lenguaje de r, entonces $r^* = r$.

   Sea L el lenguaje generado por r. Si $rr = r$, entonces $L^2 = L$. Por tanto, por inducción se puede demostrar que $L^n = L$ para todo $n \geqslant 1$. Por tanto, tenemos que:
   $$L^* = \bigcup_{n \geqslant 0} L^n = L^0 \cup \left(\bigcup_{n \geqslant 1} L^n \right) = L^0 \cup L = \{\varepsilon\} \cup L = L.$$

donde en la última igualdad se ha usado que $\varepsilon \in L$. Por tanto, $r^* = r$ es verdadero.

8. Si un AFD tiene n estados y acepta una palabra de longitud n, entonces el lenguaje aceptado es infinito.

   Es verdadero por una idea similar a la demostración del Lema de Bombeo. Al leer n símbolos, hambremos pasado por $n+1$ estados, por lo que habremos pasado por un estado dos veces. Por tanto, podemos repetir el ciclo que hemos hecho para obtener palabras de longitud $n + k \cdot$ longitud del ciclo, que serán aceptadas por el autómata.

9. Si un autómata finito no tiene una pareja de estados indistinguibles, entonces es siempre minimal.

   Falso, ya que puede tener estados inalcanzables.

10. Una palabra generada por una gramática independiente del contexto tiene siempre una única derivación por la izquierda.

    Falso, ya que aunque siempre me obliga a elegir una variable, no me obliga a elegir qué producción usar en cada paso, por lo que se pueden diferenciar las derivaciones.

11. Para aplicar el algoritmo para pasar una gramática a forma normal de Greibach es necesario que la gramática ya esté en forma normal de Chomsky.

    No, no es necesario, aunque estas condiciones se garantizan si la gramática está en forma normal de Chomsky. No obstante, la regla:

    $$P \to ABCD$$

    es válida para aplicar el algoritmo de Greibach, pero no está en forma normal de Chomsky.

12. Si en una gramática independiente del contexto las únicas posibles derivaciones de A son $A \to ACD$ y $A \to aD$, entonces si se aplica la función ELIMINA_2 del algoritmo de Greibach, tenemos que añadir una nueva variable B_A, resultando en una gramática en la que la única derivación de A es $A \to aDB_A$.

    No, ya que la producción $A \to aD$ no se elimina.

13. Si una gramática está en forma normal de Greibach, entonces una palabra de longitud n se deriva siempre en $n+1$ pasos.

    Falso, ya que se obtendrá siempre en n pasos de derivación.

14. Si al aplicar el algoritmo de Early, tenemos que $\texttt{REGISTROS}[j] = \emptyset$ después de aplicar el paso de avance para este valor de j, entonces la palabra no es generada por la gramática.

    Cierto, ya que esto indica que no puedes generar ninguna palabra cuyos j primeros símbolos coincidan con dicha palabra.

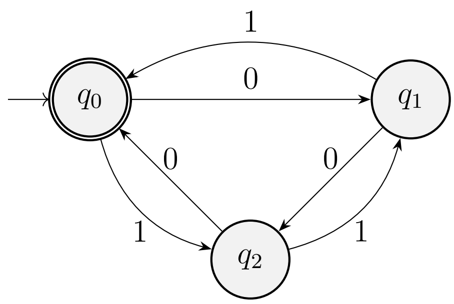


Figura 1: Autómata finito determinista que acepta el lenguaje de palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ tales que la diferencia entre el número de 0's y el número de 1's es múltiplo de 3.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Construir un autómata finito determinista minimal que acepte el conjunto de palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ tales que la diferencia entre el número de 0's y el número de 1's es múltiplo de 3. Construir una expresión regular para ese mismo lenguaje usando cualquiera de los procedimientos vistos en clase.

El AFD que acepta el lenguaje se encuentra en la Figura 1.

La expresión regular que acepta el lenguaje resulta de resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_0 &= 0q_1 + 1q_2 + \varepsilon, \\ q_1 &= 0q_2 + 1q_0, \\ q_2 &= 0q_0 + 1q_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de q_2 en la segunda ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0q_2 + 1q_0 = \\ &= 0[0q_0 + 1q_1] + 1q_0 = \\ &= 00q_0 + 01q_1 + 1q_0 = \\ &= (01)^*[00 + 1]q_0 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de q_1 en la primera ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} q_0 &= 0q_1 + 1q_2 + \varepsilon = \\ &= 0q_1 + 1[0q_0 + 1q_1] + \varepsilon = \\ &= (0 + 11)q_1 + 10q_0 + \varepsilon = \\ &= (0 + 11)(01)^*[00 + 1]q_0 + 10q_0 + \varepsilon = \\ &= [(0 + 11)(01)^*[00 + 1] + 10]q_0 + \varepsilon = \\ &= [(0 + 11)(01)^*[00 + 1] + 10]^* \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Sea la gramática independiente del contexto:

$$\begin{aligned} S &\to aSb \mid bY \mid Ya, \\ Y &\to bY \mid aY \mid a \mid b. \end{aligned}$$

Determina usando el algoritmo de Early si las siguientes palabras son generadas: $aabb$, $abbb$.

Calculamos los conjuntos de registros para la palabra $aabb$:

$$\begin{aligned}
\texttt{REGISTROS}[0] = \{&(0,0,S,\varepsilon,aSb),(0,0,S,\varepsilon,bY),(0,0,S,\varepsilon,Ya),(0,0,Y,\varepsilon,bY),\\
&(0,0,Y,\varepsilon,aY),(0,0,Y,\varepsilon,a),(0,0,Y,\varepsilon,b)\},\\
\texttt{REGISTROS}[1] = \{&(0,1,S,a,Sb),(0,1,Y,a,Y),(0,1,Y,a,\varepsilon),(0,1,S,Y,a),(1,1,S,\varepsilon,aSb),\\
&(1,1,S,\varepsilon,bY),(1,1,S,\varepsilon,Ya),(1,1,Y,\varepsilon,bY),(1,1,Y,\varepsilon,aY),(1,1,Y,\varepsilon,a),\\
&(1,1,Y,\varepsilon,b)\},\\
\texttt{REGISTROS}[2] = \{&(0,2,S,Ya,\varepsilon),(1,2,S,a,Sb),(1,2,Y,a,Y),(1,2,Y,a,\varepsilon),(0,2,Y,aY,\varepsilon),\\
&(1,2,S,Y,a),(0,2,S,Y,a),(2,2,S,\varepsilon,aSb),(2,2,S,\varepsilon,bY),(2,2,S,\varepsilon,Ya),\\
&(2,2,Y,\varepsilon,bY),(2,2,Y,\varepsilon,aY),(2,2,Y,\varepsilon,a),(2,2,Y,\varepsilon,b)\},\\
\texttt{REGISTROS}[3] = \{&(2,3,S,b,Y),(2,3,Y,b,Y),(2,3,Y,b,\varepsilon),(1,3,Y,aY,\varepsilon),(2,3,S,Y,a),\\
&(0,3,Y,aY,\varepsilon),(1,3,S,Y,a),(0,3,S,Y,a),,(3,3,Y,\varepsilon,bY),(3,3,Y,\varepsilon,aY),\\
&(3,3,Y,\varepsilon,a),(3,3,Y,\varepsilon,b)\},\\
\texttt{REGISTROS}[4] = \{&(3,4,Y,b,Y),(3,4,Y,b,\varepsilon),(2,4,S,bY,\varepsilon),(2,4,Y,bY,\varepsilon),(1,4,S,aS,b),\\
&(1,4,Y,aY,\varepsilon),(2,4,S,Y,a),(0,4,Y,aY,\varepsilon),(1,4,S,Y,a),(0,4,S,Y,a)\}
\end{aligned}$$

Como $\nexists \alpha \in (V \cup T)^*$ tal que $(0,4,S,\alpha,\varepsilon)$, entonces la palabra $aabb$ no es generada por la gramática. Aplicamos ahora el algoritmo de Early para la palabra $abbb$:

$$\begin{aligned}
\texttt{REGISTROS}[0] = \{&(0,0,S,\varepsilon,aSb),(0,0,S,\varepsilon,bY),(0,0,S,\varepsilon,Ya),(0,0,Y,\varepsilon,bY),\\
&(0,0,Y,\varepsilon,aY),(0,0,Y,\varepsilon,a),(0,0,Y,\varepsilon,b)\},\\
\texttt{REGISTROS}[1] = \{&(0,1,S,a,Sb),(0,1,Y,a,Y),(0,1,Y,a,\varepsilon),(0,1,S,Y,a),(1,1,S,\varepsilon,aSb),\\
&(1,1,S,\varepsilon,bY),(1,1,S,\varepsilon,Ya),(1,1,Y,\varepsilon,bY),(1,1,Y,\varepsilon,aY),(1,1,Y,\varepsilon,a),\\
&(1,1,Y,\varepsilon,b)\},\\
\texttt{REGISTROS}[2] = \{&(1,2,S,b,Y),(1,2,Y,b,Y),(1,1,Y,b,\varepsilon),(0,2,Y,a,\varepsilon),(1,2,S,Y,a),\\
&(0,2,S,Y,a),(2,2,Y,\varepsilon,bY),(2,2,Y,\varepsilon,aY),(2,2,Y,\varepsilon,a),(2,2,Y,\varepsilon,b)\},\\
\texttt{REGISTROS}[3] = \{&(2,3,Y,b,Y),(2,3,Y,b,\varepsilon),(1,3,S,bY,\varepsilon),(1,3,Y,bY,\varepsilon),(0,3,S,aS,b),\\
&(0,3,Y,aY,\varepsilon),(1,3,S,Y,a),(0,3,S,Y,a),(3,3,Y,\varepsilon,bY),(3,3,Y,\varepsilon,aY),\\
&(3,3,Y,\varepsilon,a),(3,3,Y,\varepsilon,b)\},\\
\texttt{REGISTROS}[4] = \{&(0,4,S,aSb,\varepsilon),(3,4,Y,b,Y),(3,4,Y,b,\varepsilon),(2,4,Y,bY,\varepsilon),(1,4,S,bY,\varepsilon),\\
&(1,4,Y,bY,\varepsilon),(0,4,Y,aY,\varepsilon),(1,4,S,Y,a),(0,4,S,Y,a)\}
\end{aligned}$$

Por tanto, la palabra $abbb$ es generada por la gramática, ya que $(0,4,S,aSb,\varepsilon)$.

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Determinar si los siguientes lenguajes son regulares y/o independientes del contexto. Justifica las respuestas.

1. El lenguaje complementario del generado por la gramática del ejercicio anterior.

   Este lenguaje es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(G) &= \{a^i bub^i \mid i \in \mathbb{N}\cup\{0\}, u \in \{a,b\}^+\} \cup \{a^i uab^i \mid i \in \mathbb{N}\cup\{0\}, u \in \{a,b\}^+\} =\\
&= \{a^i ub^i \mid i \in \mathbb{N}\cup\{0\}, u \in \{a,b\}^*, |u| \geqslant 2\} \setminus \{a^i aubb^i \mid i \in \mathbb{N}\cup\{0\}, u \in \{a,b\}^*\} =\\
&= \{a^i ub^i \mid i \in \mathbb{N}\cup\{0\}, u \in \{a,b\}^*, |u| \geqslant 2\} \setminus \{a^i ub^i \mid i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, u \in \{a,b\}^*\}
\end{aligned}$$

2. El lenguaje sobre el alfabeto $\{0, 1, 2, 3\}$ de las palabras en las que el número de 0's es igual al número de 1's y el número de 2's es igual al número de 3's.

   Veamos que no es independiente del contexto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la palabra $z = 0^n 2^n 1^n 3^n \in L$, con $|z| = 4n \geqslant n$. Toda descompisición de z en $uvwxy$ con $|vwx| \leqslant n$ y $|vx| \geqslant 1$ debe cumplir que vwx esté contenido en una o dos de las cuatro partes de z, pero no en tres. Por tanto, al bombear con $i = 2$ se obtiene una palabra que no está en L. Por tanto, L no es independiente del contexto.

3. Palabras sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ que comienzan y terminan con el mismo símbolo.

   Es regular, con expresión regular:

$$0 + 1 + \varepsilon + 1(0 + 1)^*1 + 0(0 + 1)^*0$$

4. Palabras $u \in \{0, 1\}^*$ tales que si $|u| \leqslant 100$, entonces u es un palíndromo y si $|u| \geqslant 50$, entonces no contiene la subcadena 0110.

   Definimos los siguientes lenguajes:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{u \in \{0, 1\}^* \mid |u| < 50 \text{ y } u \text{ es palíndromo}\}, \\ L_2 &= \{u \in \{0, 1\}^* \mid 50 \leqslant |u| \leqslant 100 \text{ y } u \text{ es palíndromo y no contiene } 0110\}, \\ L_3 &= \{u \in \{0, 1\}^* \mid 100 < |u| \text{ y } u \text{ no contiene } 0110\}. \end{aligned}$$

   Tenemos que el lenguaje dado es $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, donde los dos primeros son regulares por ser finitos y el tercero sabemos que es regular.

Ejercicio 5 (1 punto)**.**

Observación. Este ejercicio es voluntario y sirve para subir un punto adicional en la parte de teoría.

Si L es un lenguaje, entonces se define NOPREFIJO(L) como el lenguaje de palabras $u \in L$ tales que ningún prefijo propio de u está en L y NOEXTENSION(L) como la clase de palabras $u \in L$ tales que u no es un prefijo propio de cualquier otra palabra de L. Demostrar que la clase de lenguajes independientes del contexto no es cerrada por las transformaciones NOPREFIJO y NOEXTENSION.