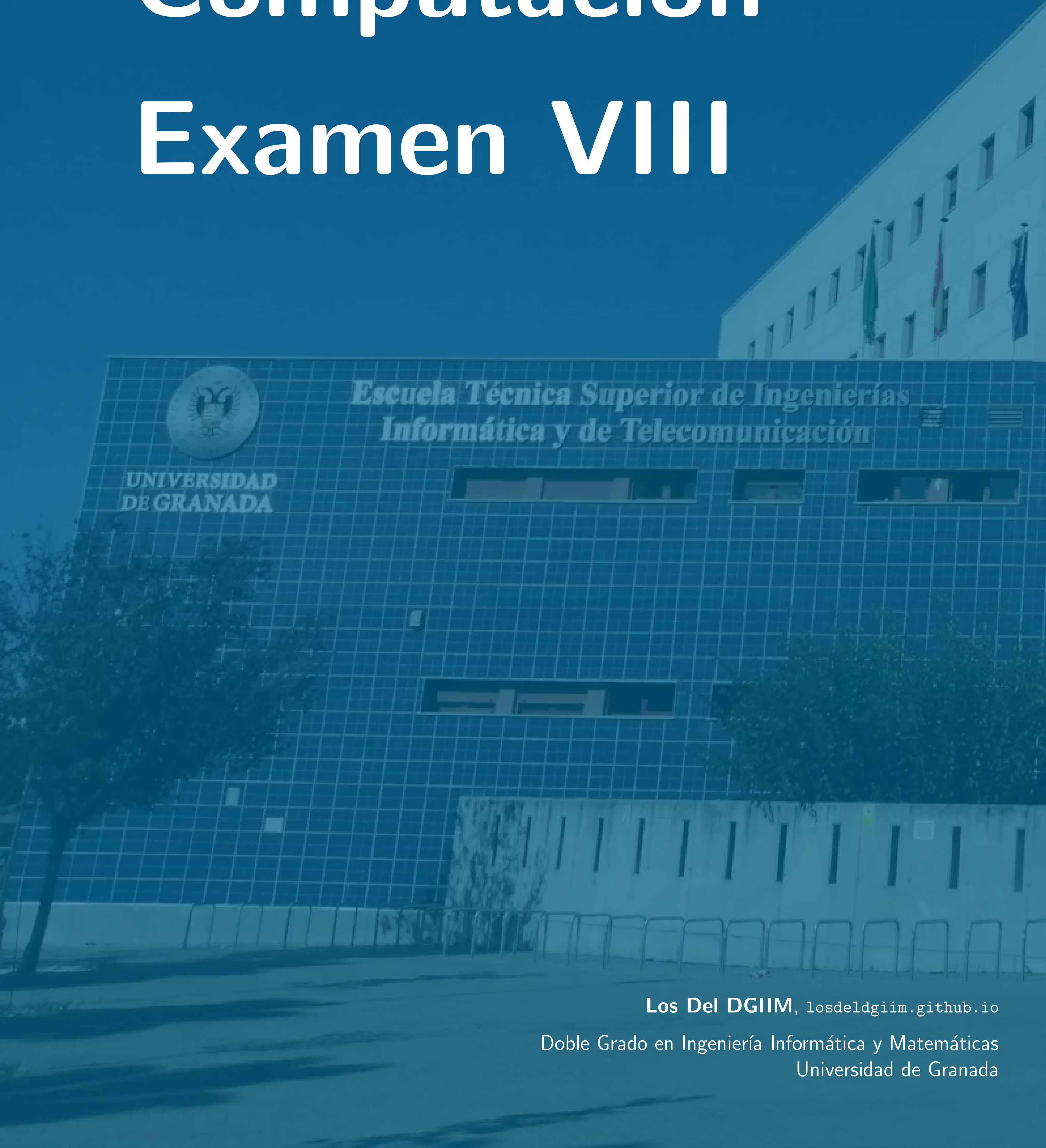
Modelos de Computación Examen VIII



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos de Computación Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Modelos de Computación

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo A1.

Profesor Marios Kountouris.

Descripción Parcial Temas 3 y 4.

Fecha 11 de diciembre de 2024.

Duración 60 minutos.

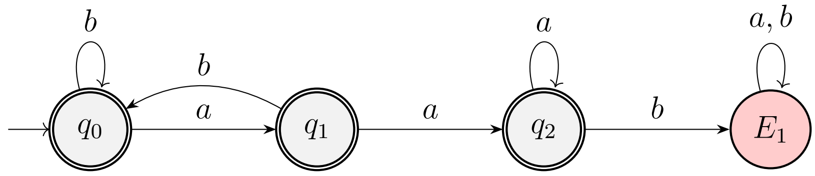


Figura 1: Autómata Finito Determinista para L_1.

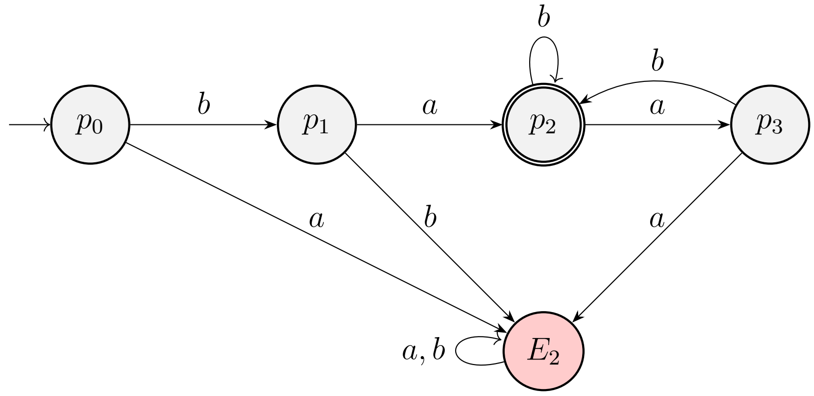


Figura 2: Autómata Finito Determinista para L_2.

Ejercicio 1. Sobre el alfabeto $A = \{a, b\}$, se pide:

1. Construir un Autómata Finito Determinista para el lenguaje:

$$L_1 = \{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ no contiene la subcadena “}aab\text{”}\}$$

   El AFD se puede ver en la Figura 1.

2. Construir un Autómata Finito Determinista para el lenguaje L_2 dado por la expresión regular:

$$ba(ab + b)^*$$

   El AFD se puede ver en la Figura 2.

3. Construir un Autómata Finito Determinista que acepte el lenguaje $L_1 \cap L_2$ y minimizarlo.

   Para ello, usaremos el autómata producto. Los estados finales son:

$$F = \{q_0p_2, q_1p_2, q_2p_2\}$$

   En primer lugar, y para que la obtención del autómata sea más sencilla, vemos que todos los estados de la forma q_iE_2, E_1p_j, E_1E_2 con $i \in \{0, 1, 2\}$ y $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ son estados indistinguibles, puesto que de ellos nunca vamos a poder salir (al no poder salir de E_1E_2). Como ninguno de ellos es final, son indistinguibles y los fusionamos en un único estado de error E. El AFD producto al que llegamos, habiendo previamente fusionado dichos estados, se puede ver en la Figura 3.

   La minimización del autómata producto se muestra en la Tabla 1.

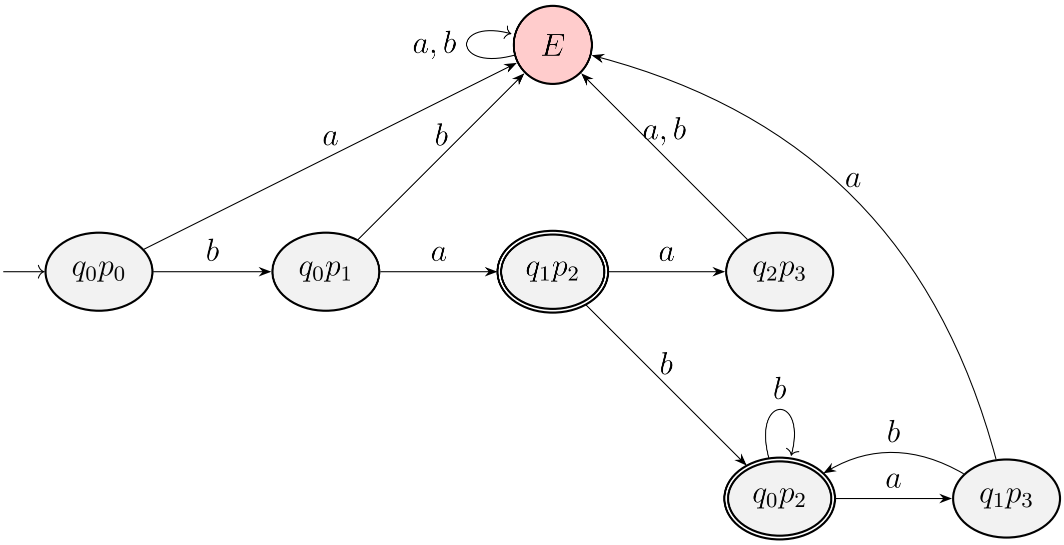


Figura 3: Autómata Finito Determinista para $L_1 \cap L_2$.

q_0p_1	$\times$					
q_1p_2	$\times$	$\times$				
q_2p_3	$\times$	$\times$	$\times$			
q_0p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
q_1p_3	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
E	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
	q_0p_0	q_0p_1	q_1p_2	q_2p_3	q_0p_2	q_1p_3

Tabla 1: Tabla de minimización del AFD producto.

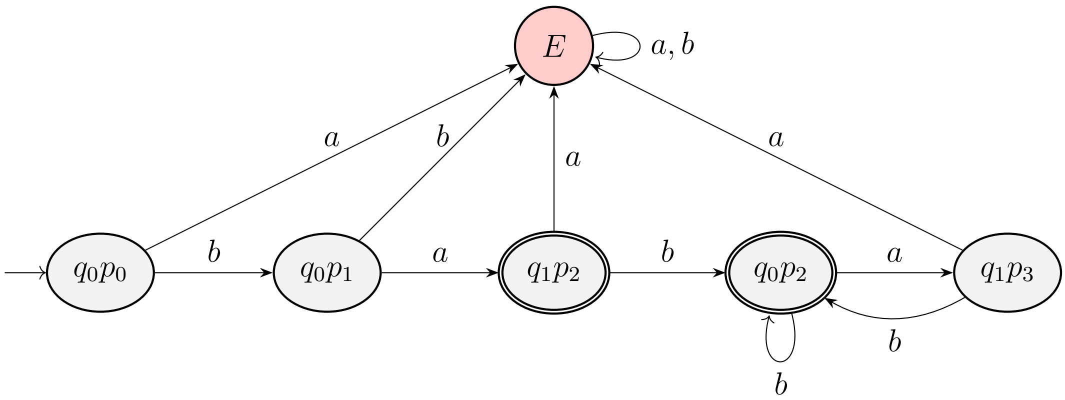


Figura 4: Autómata Finito Determinista mínimo para $L_1 \cap L_2$.

Por tanto, hemos detectado que q_2p_3 también es de error. Es decir, notando por $\equiv$ a la relación de indistinguibilidad, tenemos que:

$$q_2p_3 \equiv E$$

Por tanto, el autómata mínimo es el que se muestra en la Figura 4.

Ejercicio 2. Sea la gramática $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ con P el conjunto que contiene las producciones:

$$S \to abSba \mid baSab \mid ababSbaba \mid babaSabab \mid ccc$$

1. Demuestra que $\mathcal{L}(G)$ no es regular.

   Veamos en primer lugar el valor de $\mathcal{L}(G)$ mediante doble inclusión:

   $$\mathcal{L}(G) = \{ucccu^{-1} \mid u \in \{ab, ba\}^*\}$$

   $\subseteq$) Sea $w \in \mathcal{L}(G)$. Entonces, existe una sucesión de pasos de derivación desde S tal que $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$. En cada paso de derivación, vamos obteniendo la palabra u y u^{-1}, y para finalizar es necesario usar $S \to ccc$. Por tanto, $w = ucccu^{-1}$ con $u \in \{ab, ba\}^*$.

   $\supseteq$) Sea $w = ucccu^{-1}$ con $u \in \{ab, ba\}^*$. Entonces, con las 2 primeras reglas de P podemos obtener uSu^{-1}, y finalmente con la quinta regla obtenemos $ucccu^{-1}$.

   Veamos ahora que no es regular usando el recíproco del lema de Bombeo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $z = (ab)^n c^3 (ba)^n$, con $|z| = 4n + 3 \geqslant n$. Sea ahora una descomposición $z = uvw$ de z, con $u, v, w \in \{a, b, c\}^*$ y $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$.

   Como $|uv| \leqslant n$, tenemos que v es una subcadena propia de $(ab)^n$. Por tanto, bombeando con $i = 0$, tenemos que queda $uv^0w = xc^3(ba)^n$, con $x \in \{a, b\}^*$ subcadena propia de $(ab)^n$, $|x| = |(ab)^n| - |v| = 2n - |v| < 2n$.

   Por tanto, como $|x| \neq |(ba)^n|$, tenemos que $(ba)^n \neq x^{-1}$, y por tanto tenemos que $uv^0w \notin \mathcal{L}(G)$. Por el recíproco del lema de Bombeo, $\mathcal{L}(G)$ no es regular.

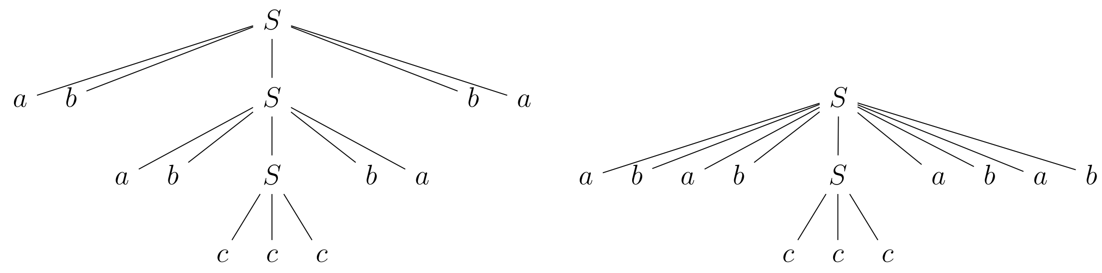


Figura 5: Árboles de derivación para $(ab)^2c^3(ba)^2$.

2. Demuestra que G es una gramática ambigua.

   Para ello, basta con ver que la palabra $(ab)^2c^3(ba)^2 \in \mathcal{L}(G)$ tiene más de un árbol de derivación. En concreto, los árboles de derivación que se pueden obtener son los que se muestran en la Figura 5.

3. Dar una gramática no ambigua que genere el lenguaje $\mathcal{L}(G)$.

   Consideramos la gramática $G' = (\{S'\}, \{a, b, c\}, P', S')$ con P' el conjunto que contiene las producciones:

$$S' \to abS'ba \mid baS'ab \mid ccc$$

   Es directo ver que $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$, y que G' es una gramática no ambigua, puesto que dependiendo de la palabra tan solo podrá derivar de una forma, ya que cada regla de producción comienza por un símbolo terminal distinto.