UNIVERSIDAD DE GRANADA

E.T.S. DE INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE TELECOMUNICACIÓN

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Autor: Miguel Gangoso Martínez

Índice

1. Problema NP-completo: Camino más largo

1.1. Descripción del problema

El problema del Camino más largo se enuncia formalmente de la siguiente forma:

Entrada: Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y un entero positivo $K \leq |V|$.

Pregunta: ¿Existe en G un camino simple con K o más arcos?

Recordemos que un camino simple se define como una secuencia de vértices y aristas donde no se repite ningún vértice. Por tanto, el problema de decisión consiste en determinar si es posible recorrer al menos K aristas de forma conexa sin pasar dos veces por el mismo nodo.

El objetivo de esta sección es demostrar que el problema del Camino más largo es NP-completo.

1.2. Demostración de la NP-completitud

Para demostrar la NP-completitud del problema, la prueba se divide en dos partes:

1. Demostrar que el problema pertenece a la clase NP mediante un verificador en tiempo polinómico.
2. Demostrar que es NP-completo, construyendo una reducción en tiempo polinómico desde un problema NP-completo conocido.

Para la segunda parte, la reducción se realizará desde el problema del Circuito Hamiltoniano, que sabemos que es NP-completo.

1.2.1. El problema está en NP

El problema del Camino más largo pertenece a NP. Para formalizar esto, basta con definir un certificado de tamaño polinómico y un algoritmo verificador determinista que lo compruebe en tiempo polinómico.

Dada una instancia afirmativa, el certificado propuesto es la propia secuencia de vértices que forman el camino:

$$C = (v_0, v_1, \ldots, v_r),$$

donde $r \geq K$, indicando que el camino contiene al menos K arcos.

El tamaño de este certificado está acotado polinómicamente. Al tratarse de un camino simple, la secuencia no puede contener más de $|V|$ vértices. Por tanto, la lista contiene a lo sumo $|V|$ elementos, y cada uno de ellos puede representarse con $O(\log |V|)$ bits. Así, el tamaño total del certificado es polinómico respecto al tamaño de la entrada.

El algoritmo verificador debe comprobar las siguientes condiciones:

1. **Validez de los vértices:** Para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$, se cumple que $v_i \in V$.
2. **Simplicidad del camino:** Para todo par i, j tal que $i \neq j$, se cumple que $v_i \neq v_j$.

3. **Validez de las aristas:** Para todo $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, existe la arista $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

4. **Condición de longitud:** Se cumple la restricción $r \geq K$.

Todas estas comprobaciones pueden realizarse en tiempo polinómico. La pertenencia de los vértices a V y de las aristas a E se comprueba recorriendo la secuencia y consultando la representación del grafo, ya sea mediante matriz de adyacencia o lista de adyacencia. La simplicidad del camino puede verificarse comparando todos los pares de vértices de la secuencia, lo cual requiere a lo sumo $O(|V|^2)$ comparaciones. Finalmente, comprobar que $r \geq K$ es inmediato.

Como existe un verificador determinista en tiempo polinómico, el problema pertenece a la clase NP.

1.2.2. Reducción desde Circuito Hamiltoniano

A continuación, se define una transformación f que convierte cualquier instancia del Circuito Hamiltoniano en una instancia del Camino más largo, demostrando así que el Circuito Hamiltoniano se reduce polinómicamente al Camino más largo.

Sea una instancia del problema del Circuito Hamiltoniano dada por un grafo no dirigido $G = (V, E)$, con $|V| = n$.

Construiremos una nueva instancia del problema del Camino más largo, formada por un nuevo grafo $G' = (V', E')$ y un valor objetivo K'. La idea de la reducción es la siguiente: si un grafo tiene un circuito hamiltoniano, al eliminar una arista de ese circuito se obtiene un camino simple que pasa por todos los vértices. Como no sabemos de antemano qué aristas forman parte de ese circuito, construiremos en G' una copia asociada a cada arista de E.

Construcción formal del grafo G' Para cada arista $e = \{u, v\} \in E$, se construye un subgrafo al que llamaremos G_e.

El subgrafo G_e se define de la siguiente forma:

- Cada vértice original $x \in V$ se copia como un nuevo vértice x^e. El superíndice e sirve para indicar a qué copia pertenece ese vértice. Así, si $e_i \neq e_j$, los vértices x^{e_i} y x^{e_j} son vértices distintos.
- Se conservan todas las aristas correspondientes a G, excepto la arista $e = \{u, v\}$, que se elimina en esta copia.
- Se introducen dos vértices nuevos, α_e y β_e, exclusivos de esta copia.
- Se añade una arista entre α_e y u^e.
- Se añade una arista entre β_e y v^e.

Una vez construidos todos los subgrafos G_e, el grafo global G' se define como la unión disjunta de todos ellos:

$$G' = \bigsqcup_{e \in E} G_e.$$

Que sea una unión disjunta significa que no hay aristas entre vértices pertenecientes a copias distintas. Es decir, no existe ninguna arista que conecte un vértice de G_{e_i} con un vértice de G_{e_j} si $e_i \neq e_j$. Por tanto, cualquier camino de G' debe estar contenido completamente dentro de una única copia G_e.

Finalmente, el parámetro K' se define como:

$$K' = n + 1.$$

La nueva instancia generada es (G', K').

La transformación es polinómica Sea $m = |E|$. La transformación crea exactamente m subgrafos, uno por cada arista de G.

En cada subgrafo G_e, el número de vértices es n más los dos vértices nuevos α_e y β_e. Por tanto,

$$|V(G_e)| = n + 2.$$

Como hay m copias en la unión disjunta, el número total de vértices de G' es:

$$|V'| = m(n + 2).$$

Respecto a las aristas, cada subgrafo G_e contiene $m - 1$ aristas heredadas del grafo original, ya que se elimina la arista e, y además contiene las dos aristas nuevas incidentes en α_e y β_e. Por tanto, cada copia tiene

$$(m - 1) + 2 = m + 1$$

aristas. Como hay m copias, el número total de aristas de G' es:

$$|E'| = m(m + 1).$$

Tanto $|V'|$ como $|E'|$ están acotados por un polinomio en el tamaño de la entrada original, que viene dado por n y m. Además, el valor $K' = n+1$ se calcula directamente a partir del número de vértices de G.

Por tanto, la instancia (G', K') tiene tamaño polinómico y puede construirse en tiempo polinómico.

1.3. Equivalencia de soluciones

Procedemos a demostrar la doble implicación:

G tiene circuito hamiltoniano $\iff$ G' tiene un camino simple con al menos $K' = n+1$ arcos.

1.3.1. Condición necesaria ($\implies$)

Supongamos que el grafo original G tiene un circuito hamiltoniano.

Dicho circuito es un ciclo simple que pasa por los n vértices de G exactamente una vez. Sea $e = \{u, v\}$ una arista cualquiera perteneciente a ese circuito.

Si eliminamos la arista e del circuito, obtenemos un camino simple que conecta u con v y que pasa por todos los vértices de G. Este camino tiene $n - 1$ arcos.

Ahora consideramos en G' la copia G_e, correspondiente precisamente a la arista eliminada. Por construcción, en esta copia se ha eliminado la arista $\{u, v\}$, pero se han añadido los vértices α_e y β_e, junto con las aristas

$$\{\alpha_e, u^e\} \quad \text{y} \quad \{\beta_e, v^e\}.$$

Como G_e conserva el resto de las aristas del camino original, podemos construir el siguiente camino:

$$\alpha_e,\ u^e,\ \ldots,\ v^e,\ \beta_e.$$

Este camino pasa por los n vértices copiados de G y por los dos vértices nuevos α_e y β_e. En total visita $n + 2$ vértices, por lo que tiene $n + 1$ arcos.

Como $K' = n + 1$, se obtiene un camino simple con al menos K' arcos en G'. Por tanto, si G tiene circuito hamiltoniano, entonces la instancia (G', K') del problema Camino más largo tiene respuesta afirmativa.

1.3.2. Condición suficiente ($\Longleftarrow$)

Supongamos ahora que G' contiene un camino simple de longitud al menos $K' = n+1$ arcos.

Como G' es una unión disjunta de subgrafos, no hay aristas entre copias distintas. Por tanto, un camino no puede pasar de una copia G_{e_i} a otra copia G_{e_j}. En consecuencia, el camino de longitud $n + 1$ debe estar completamente contenido en un único subgrafo G_e.

Cada subgrafo G_e tiene exactamente $n + 2$ vértices. Un camino simple con $n + 1$ arcos contiene exactamente $n + 2$ vértices. Por tanto, ese camino debe recorrer todos los vértices del subgrafo G_e.

Además, los vértices α_e y β_e tienen grado 1 por construcción. Si un camino simple pasa por todos los vértices de G_e, entonces estos dos vértices de grado 1 deben ser los extremos del camino.

Por tanto, el camino tiene la forma:

$$\alpha_e,\ u^e,\ \ldots,\ v^e,\ \beta_e.$$

Si eliminamos los vértices terminales α_e y β_e, queda un camino desde u^e hasta v^e que visita todos los n vértices copiados del grafo original exactamente una vez.

Al proyectar este camino sobre el grafo original G, obtenemos un camino hamiltoniano desde u hasta v. Además, como el subgrafo considerado era G_e y $e = \{u, v\}$ era una arista del grafo original, sabemos que $\{u, v\} \in E$.

Por tanto, podemos añadir la arista $\{u, v\}$ al camino hamiltoniano obtenido y cerrar un ciclo que pasa por todos los vértices exactamente una vez. Ese ciclo es un circuito hamiltoniano de G.

Así, si G' tiene un camino simple con al menos K' arcos, entonces G tiene un circuito hamiltoniano.

1.4. Ejemplo ilustrativo

Consideremos una instancia sencilla dada por un grafo cíclico de $n = 4$ vértices:

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}.$$

Este grafo tiene el circuito hamiltoniano

$$1 - 2 - 3 - 4 - 1.$$

Para aplicar la reducción, nos fijamos en la arista $e = \{1, 2\}$. En la construcción de G', se genera el subgrafo correspondiente G_e, en el cual:

- Los vértices son $1^e, 2^e, 3^e, 4^e, \alpha_e, \beta_e$.
- La arista original $\{1, 2\}$ no se incluye.
- Se añaden las aristas de conexión $\{\alpha_e, 1^e\}$ y $\{\beta_e, 2^e\}$.

En esta copia aparece el camino:

$$\alpha_e \to 1^e \to 4^e \to 3^e \to 2^e \to \beta_e.$$

Este camino visita 6 vértices, es decir, $n+2$ vértices, y por tanto tiene 5 arcos. Como en este caso $K' = n + 1 = 5$, la instancia construida del problema Camino más largo tiene respuesta afirmativa.

1.5. Por qué no basta con quitar una arista directamente

Podría pensarse que basta con tomar el grafo original G, eliminar una arista cualquiera y preguntar si existe un camino de longitud $n - 1$. Sin embargo, esa idea no es suficiente para una reducción correcta.

El problema es que no sabemos qué arista pertenece al posible circuito hamiltoniano. Si se elimina una arista que no forma parte del circuito buscado, la transformación no refleja correctamente la estructura de la solución. Además, un grafo puede tener un camino hamiltoniano sin tener circuito hamiltoniano. Por ejemplo, el camino $1-2-3-4$ pasa por todos los vértices, pero no forma un circuito si no existe la arista $\{4, 1\}$.

Por eso la construcción anterior crea una copia por cada arista $e \in E$. De esta forma, si existe un circuito hamiltoniano, alguna de esas copias corresponderá a una arista del circuito que puede eliminarse para obtener el camino largo. Y, en sentido contrario, si aparece un camino suficientemente largo en alguna copia, la arista eliminada en esa copia permite cerrar de nuevo el camino y recuperar un circuito hamiltoniano en el grafo original.

1.6. Conclusión

Mediante la demostración anterior se ha probado:

1. Que existe un verificador en tiempo polinómico para comprobar certificados afirmativos, por lo que el problema del Camino más largo pertenece a NP.
2. Que existe una reducción polinómica desde el problema del Circuito Hamiltoniano, que es NP-completo, al problema del Camino más largo.

Por tanto, como el problema pertenece a NP y además existe una reducción desde un problema NP-completo, concluimos que:

El problema de decisión del Camino más largo es NP-completo.

2. Problema NP-completo: Partición en subgrafos hamiltonianos

2.1. Descripción del problema

El problema de la Partición en subgrafos hamiltonianos se enuncia formalmente de la siguiente manera:

Entrada: Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y un entero positivo $K \leq |V|$.

Pregunta: ¿Pueden particionarse los vértices de G en $k \leq K$ conjuntos disjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de tal forma que, para todo $1 \leq i \leq k$, el subgrafo inducido por V_i contiene un circuito hamiltoniano?

Recordemos que el subgrafo inducido por un conjunto $S \subseteq V$ es el grafo que tiene S como conjunto de vértices y que contiene exactamente las aristas de E cuyos dos extremos pertenecen a S. En consecuencia, el problema pregunta si es posible descomponer los vértices del grafo en grupos de modo que cada grupo, junto con las aristas que los conectan dentro del grafo original, forme por sí solo un grafo que admita un circuito hamiltoniano.

El objetivo de esta sección es demostrar que el problema de la Partición en subgrafos hamiltonianos es NP-completo.

2.2. Demostración de la NP-completitud

La demostración consta de dos partes:

1. Demostrar que el problema pertenece a la clase NP mediante un verificador en tiempo polinómico.

2. Demostrar que existe una reducción polinómica desde el problema del Circuito Hamiltoniano, que es NP-completo, al problema de la Partición en subgrafos hamiltonianos.

2.2.1. El problema está en NP

Para demostrar que el problema pertenece a la clase NP, proponemos un certificado de tamaño polinómico y un verificador en tiempo polinómico.

Dada una respuesta afirmativa, el certificado propuesto consiste en:

1. La asignación de cada vértice a un subconjunto V_i, indicando que hay en total k conjuntos.

2. Para cada conjunto V_i, la secuencia ordenada de vértices que forma su correspondiente circuito hamiltoniano.

Tamaño del certificado. El tamaño de este certificado es polinómico. En efecto, cada vértice aparece exactamente en uno de los conjuntos de la partición, por lo que el número total de entradas en la asignación es exactamente $|V|$. Además, para cada conjunto V_i, la secuencia que describe su circuito hamiltoniano contiene exactamente

$|V_i|$ vértices. Como los conjuntos son disjuntos y su unión es V, la suma de todas esas longitudes es exactamente $|V|$. Por tanto, el número total de vértices listados en el certificado es $O(|V|)$, y el número de conjuntos k está acotado por $|V|$, ya que cada conjunto debe contener al menos un vértice. Cada vértice puede codificarse con $O(\log |V|)$ bits, por lo que el tamaño total del certificado es $O(|V| \log |V|)$, que es polinómico.

Algoritmo verificador. El algoritmo verificador realiza las siguientes comprobaciones:

1. **Restricción sobre el número de partes:** El número de subconjuntos formados cumple la restricción $k \leq K$.

2. **Validez de la partición:** Los conjuntos son mutuamente disjuntos y su unión es exactamente V, es decir, forman una partición válida de los vértices del grafo.

3. **Existencia de circuito hamiltoniano en cada parte:** Para cada subconjunto V_i, se verifica que la secuencia dada contiene exactamente los vértices de V_i sin repeticiones, que para cada par de vértices consecutivos en la secuencia existe la arista correspondiente en E, y que también existe la arista que une el último vértice de la secuencia con el primero, cerrando así el circuito.

Tiempo de verificación. Todas estas comprobaciones pueden realizarse en tiempo polinómico. Comprobar la restricción $k \leq K$ es inmediato. Verificar que los conjuntos forman una partición válida puede hacerse marcando cada vértice al procesarlo y comprobando al final que todos han sido marcados exactamente una vez, lo que requiere tiempo $O(|V|)$. Para cada subconjunto V_i, verificar que la secuencia no repite vértices puede hacerse con una estructura auxiliar en tiempo $O(|V_i|)$, y comprobar la existencia de cada arista requiere una consulta a la representación del grafo, con coste $O(1)$ si se usa matriz de adyacencia o $O(\deg(v))$ si se usa lista de adyacencia. En total, el coste está acotado por $O(|V| + |E|)$, que es polinómico.

Como existe un verificador determinista en tiempo polinómico para las instancias afirmativas, el problema pertenece a la clase NP.

2.2.2. Reducción desde Circuito Hamiltoniano

La reducción se basa en la técnica de **restricción**. Esta técnica consiste en demostrar que un problema NP-completo conocido aparece como un caso particular del problema que queremos estudiar, fijando adecuadamente algunos parámetros. En este caso, el problema del Circuito Hamiltoniano se obtiene como caso particular de la Partición en subgrafos hamiltonianos cuando se impone que la partición tenga a lo sumo una parte, es decir, $K' = 1$. Como toda partición no vacía debe tener al menos una parte, esto fuerza $k = 1$.

Sea una instancia del problema del Circuito Hamiltoniano definida por un grafo no dirigido $G = (V, E)$.

2.2.3. Construcción de la nueva instancia

La transformación es directa. Construimos la instancia (G', K') fijando los siguientes valores:

- El grafo se mantiene igual:
$$G' = G.$$
- El límite máximo de partes se fija en:
$$K' = 1.$$

Esta construcción es polinómica, ya que solo requiere copiar el grafo de entrada y fijar el valor de K' a una constante. En particular, el tamaño de (G', K') es lineal respecto al tamaño de la entrada original. Por tanto, la instancia (G', K') se construye en tiempo polinómico.

2.3. Equivalencia de soluciones

Procedemos a demostrar que la solución se preserva en ambos sentidos:

G tiene un circuito hamiltoniano $\iff$ G' tiene una partición válida para $K' = 1$.

2.3.1. Condición necesaria ($\implies$)

Supongamos que el grafo original G tiene un circuito hamiltoniano.

Tomamos todos los vértices del grafo y los agrupamos en un único conjunto:

$$V_1 = V.$$

Esto define una partición con un solo conjunto, es decir, $k = 1$. Como hemos fijado $K' = 1$, se cumple la restricción $k \leq K'$.

El subgrafo inducido por V_1 coincide con el grafo original G, ya que V_1 contiene todos los vértices y se conservan todas las aristas entre ellos. Como por hipótesis G tiene un circuito hamiltoniano, el subgrafo inducido por V_1 también lo contiene.

Por tanto, la instancia construida (G', K') tiene respuesta afirmativa.

2.3.2. Condición suficiente ($\impliedby$)

Supongamos ahora que los vértices del grafo G' pueden particionarse en $k \leq K' = 1$ conjuntos, de forma que cada subgrafo inducido por uno de esos conjuntos contiene un circuito hamiltoniano.

Como $K' = 1$, se tiene $k \leq 1$. Por otro lado, para que exista una partición de los vértices debe haber al menos un conjunto, luego $k \geq 1$. Por tanto, necesariamente $k = 1$.

Así, la partición solo puede estar formada por un único conjunto V_1. Como la partición debe cubrir todos los vértices del grafo, se cumple que $V_1 = V$.

El subgrafo inducido por V_1 coincide con el grafo original G. Por hipótesis, dicho subgrafo contiene un circuito hamiltoniano. En consecuencia, G contiene un circuito hamiltoniano.

Por tanto, si la instancia construida del problema de Partición en subgrafos hamiltonianos tiene respuesta afirmativa, entonces el grafo original G tiene un circuito hamiltoniano.

2.4. Conclusión

Mediante la demostración anterior se ha probado:

1. Que existe un verificador en tiempo polinómico para comprobar certificados afirmativos, por lo que el problema de la Partición en subgrafos hamiltonianos pertenece a NP.

2. Que existe una reducción polinómica desde el problema del Circuito Hamiltoniano, que es NP-completo, al problema de la Partición en subgrafos hamiltonianos, mediante la técnica de restricción con $K' = 1$.

Por tanto, como el problema pertenece a NP y además existe una reducción desde un problema NP-completo, queda demostrado que:

El problema de la Partición en subgrafos hamiltonianos es NP-completo.