

NP-Compleitud: Problema del Cuadrado Latino

Antonio Javier Rodríguez Romero
Modelos Avanzados de Computación. DGIIM

1 de Junio de 2026

Definición del problema

Un *cuadrado latino* de dimensión n es una tabla $n \times n$ cuyas entradas pertenecen a un conjunto de símbolos

$$S = \{1, 2, \dots, n\},$$

de modo que ningún símbolo aparece dos veces en una misma fila ni dos veces en una misma columna.

El problema se define como sigue:

Entrada: Una tabla parcial P de tamaño $n \times n$, con algunas celdas ya rellenas con símbolos de S y otras celdas vacías.

Pregunta: ¿Pueden rellenarse las celdas vacías con símbolos de S de forma que el resultado sea un cuadrado latino válido?

Demostraremos que este problema es NP-completo.

1. Pertenencia a la clase NP

El certificado de una instancia positiva es una tabla completa L de tamaño $n \times n$ que extiende a la tabla parcial P ; es decir, L coincide con P en todas las posiciones que ya estaban pre-rellenadas.

El verificador realiza las siguientes comprobaciones:

1. Comprueba que cada entrada de L pertenece al conjunto de símbolos $S = \{1, \dots, n\}$.
2. Comprueba que L respeta todas las entradas pre-rellenadas de P .

3. Comprueba que en cada fila no se repite ningún símbolo.
4. Comprueba que en cada columna no se repite ningún símbolo.

Las comprobaciones de filas y columnas pueden realizarse manteniendo, para cada fila y para cada columna, un vector booleano de n posiciones que indique qué símbolos ya han aparecido. Como hay n^2 celdas, el tiempo total de verificación es $O(n^2)$.

Por tanto, utilizando una de las caracterizaciones vistas en la teoría del conjunto de problemas NP, como existe un verificador calculable en tiempo polinómico para un certificado, tenemos que

$$\text{COMPLETACIÓN DE CUADRADOS LATINOS} \in \text{NP}.$$

2. Reducción desde ACTRI

Para demostrar la NP-dificultad realizaremos una reducción desde ACTRI, también llamado *acoplamiento de tripletas*. Una instancia de ACTRI está formada por tres conjuntos disjuntos

$$W = \{w_1, \dots, w_q\}, \quad X = \{x_1, \dots, x_q\}, \quad Y = \{y_1, \dots, y_q\},$$

todos del mismo tamaño q , y por un conjunto de tripletas permitidas

$$M \subseteq W \times X \times Y.$$

La pregunta es si existe un subconjunto $M' \subseteq M$ de tamaño q tal que ningún elemento de W , ningún elemento de X y ningún elemento de Y aparece en dos tripletas distintas de M' . Es decir, buscamos un acoplamiento perfecto. Este problema, como se ha visto en la teoría de la asignatura, es NP-completo.

A partir de una instancia (W, X, Y, M) construiremos, en tiempo polinómico, un cuadrado latino parcial P tal que

$$(W, X, Y, M) \in \text{ACTRI} \iff P \text{ es completible}.$$

2.1. Filas, columnas y símbolos principales

Partimos de una instancia de ACTRI (W, X, Y, M) , con $|W| = |X| = |Y| = q$ y definimos

$$R_W = \{r_w : w \in W\}, \quad C_X = \{c_x : x \in X\}, \quad S_Y = \{s_y : y \in Y\}.$$

Los elementos de W se representan mediante filas, los elementos de X mediante columnas y los elementos de Y mediante símbolos. La submatriz principal será

$$R_W \times C_X.$$

La interpretación que vincula este con la instancia de ACTRI será la siguiente: colocar el símbolo s_y en la celda (r_w, c_x) representará seleccionar la tripleta (w, x, y) .

La entrada resultante del algoritmo de reducción será un cuadrado de tamaño $n \times n$, donde n es mayor que q para poder añadir filas, columnas y símbolos auxiliares. Estos elementos auxiliares se usan únicamente para implementar las restricciones de la reducción y para garantizar que, una vez elegidas las tripletas principales, el resto de la tabla pueda completarse. El valor exacto de n estará siempre acotado por un polinomio en q y en $|M|$, de forma que la reducción se mantenga polinómica.

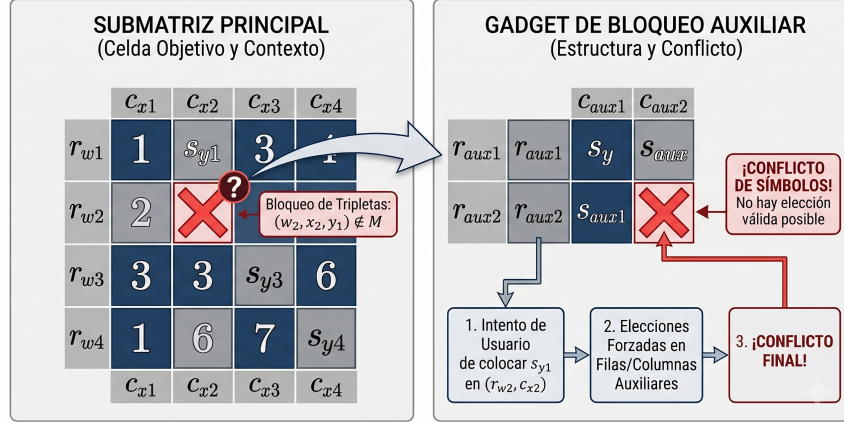


Figura 1: Esquema intuitivo de la construcción: los elementos de W se representan mediante filas, los de X mediante columnas y los de Y mediante símbolos; las filas, columnas y símbolos auxiliares permiten implementar las restricciones de la reducción. Figura generada con IA.

2.2. Bloqueo de tripletas no permitidas

El mecanismo central de la reducción consiste en prohibir que aparezcan en la submatriz principal las tripletas que no pertenecen a M . Para cada tripleta

$$(w, x, y) \notin M,$$

introducimos entradas pre-rellenadas, usando filas, columnas y símbolos auxiliares, que bloquean la posibilidad de escribir s_y en la celda (r_w, c_x) .

Formalmente, usamos un bloque auxiliar con la siguiente propiedad: para cada triple distinguido (r, c, s) se puede construir, con tamaño polinómico y sin interferir con los demás bloques, una configuración parcial que fuerza que el símbolo s no pueda aparecer en la celda (r, c) en ninguna completación latina (Adaptación de Colbourn). Aplicándolo con

$$r = r_w, \quad c = c_x, \quad s = s_y,$$

obtenemos que, en toda completación válida L de P ,

$$L(r_w, c_x) = s_y \implies (w, x, y) \in M.$$

Intuitivamente, el bloqueo se consigue usando directamente las restricciones latinas de filas y columnas. Para impedir que el símbolo s_y pueda escribirse en la celda principal (r_w, c_x) , se añaden

filas y columnas auxiliares y se pre-rellenan algunas de sus celdas con símbolos escogidos de forma controlada. La finalidad de estas entradas fijas es que, en cualquier intento de completar la tabla, colocar s_y en (r_w, c_x) produciría necesariamente una repetición de s_y en una fila o en una columna asociada al bloque.

Es importante que cada bloqueo use filas, columnas y símbolos auxiliares privados. Esto significa que el bloque asociado a una tripleta no permitida (w, x, y) no comparte sus elementos auxiliares con el bloque asociado a otra tripleta no permitida. Gracias a ello, prohibir una combinación concreta no altera las combinaciones permitidas ni introduce restricciones accidentales entre tripletas distintas. Así, el único efecto global de todos los bloques es excluir exactamente las asignaciones correspondientes a tripletas que no están en M .

Observamos que, utilizando este procedimiento, ampliaremos el cuadrado con filas, columnas y símbolos por cada una de las tripletas que no se encuentren en M . Por lo tanto, n siempre será de orden de polinómico respecto a q , el tamaño de la matriz principal y menos de q^3 ampliaciones por incompatibilidades.

2.3. Forzar la selección de un acoplamiento perfecto

Además de bloquear tripletas no permitidas, la construcción debe añadir también filas y columnas auxiliares para que la submatriz $R_W \times C_X$ codifique exactamente una selección de q tripletas válidas disjuntas. Las entradas pre-rellenadas se disponen de modo que, en cualquier completación válida:

1. Cada fila principal r_w contiene exactamente un símbolo principal de S_Y dentro de las columnas principales C_X ;
2. Cada columna principal c_x contiene exactamente un símbolo principal de S_Y dentro de las filas principales R_W ;
3. Cada símbolo principal s_y aparece exactamente una vez en la submatriz $R_W \times C_X$.

Esta parte de la construcción se implementa rellenando previamente posiciones auxiliares con los símbolos principales que no deben quedar disponibles en cada fila o columna principal. Así, las únicas posiciones libres relevantes son las que codifican la elección de tripletas. El resto de símbolos, filas y columnas auxiliares actúan como padding para que la tabla resultante siga siendo un cuadrado latino parcial y pueda completarse cuando la elección principal es consistente.

Por tanto, toda completación de P determina exactamente q entradas de la forma

$$L(r_w, c_x) = s_y, \quad r_w \in R_W, \quad c_x \in C_X, \quad s_y \in S_Y,$$

sin repetir ninguna fila principal, ninguna columna principal ni ningún símbolo principal.

Al igual que con el mecanismo de bloqueo descrito previamente, vemos que tras añadir este “padding” auxiliar, n seguirá siendo de orden polinómico respecto a q (el tamaño resultante de añadir las

filas auxiliares para bloqueos más q^3 elementos para forzar la selección de un solo símbolo principal por fila y columna). Es decir, existe un polinomio p tal que:

$$n \leq p(q)$$

3. Demostración de equivalencia

Demostraremos ahora que la instancia de ACTRI tiene un acoplamiento perfecto si, y solo si, el cuadrado latino parcial construido admite una completación.

3.1. Si ACTRI tiene solución, entonces el cuadrado parcial se completa

Supongamos que existe un acoplamiento perfecto

$$M' = \{(w_1, x_{\rho(1)}, y_{\tau(1)}), \dots, (w_q, x_{\rho(q)}, y_{\tau(q)})\} \subseteq M,$$

donde no se repite ningún elemento de W , ningún elemento de X y ningún elemento de Y .

Para cada tripleta de M' colocamos el símbolo correspondiente en la celda principal asociada:

$$L(r_{w_i}, c_{x_{\rho(i)}}) = s_{y_{\tau(i)}}.$$

Esta asignación no viola ninguna regla latina. En efecto, no se repite fila principal porque cada elemento de W aparece una sola vez en M' ; no se repite columna principal porque cada elemento de X aparece una sola vez; y no se repite símbolo principal porque cada elemento de Y aparece una sola vez.

Además, ninguna de estas asignaciones está bloqueada, ya que todas las tripletas seleccionadas pertenecen a M . Por construcción, los bloques auxiliares solo prohíben las tripletas que no pertenecen a M . Una vez fijadas estas q elecciones principales, el padding latino auxiliar (filas y columnas agregadas en el algoritmo de reducción) se completa con los símbolos restantes de manera que en ninguna fila ni columna se repita un símbolo, por la forma en que se ha definido el padding auxiliar. Por tanto, si la instancia de ACTRI tiene un acoplamiento perfecto, entonces el cuadrado latino parcial P admite una completación.

3.2. Si el cuadrado parcial se completa, entonces ACTRI tiene solución

Supongamos ahora que L es el resultado de completar P verificándose todas las restricciones del cuadrado latino. Por la construcción de selección, en la submatriz principal $R_W \times C_X$ aparecen exactamente q símbolos principales, uno por cada símbolo de S_Y , sin repetir fila principal ni columna principal. Definimos entonces

$$M' = \{(w, x, y) : L(r_w, c_x) = s_y, r_w \in R_W, c_x \in C_X, s_y \in S_Y\}.$$

El conjunto M' tiene tamaño q . Como no se repite ninguna fila principal, ningún elemento de W aparece en dos tripletas de M' . Como no se repite ninguna columna principal, ningún elemento de X aparece en dos tripletas de M' . Y, como no se repite ningún símbolo principal, ningún elemento de Y aparece en dos tripletas de M' .

Finalmente, por el mecanismo de bloqueo, si una triplete (w, x, y) no pertenece a M , entonces el símbolo s_y no puede aparecer en la celda (r_w, c_x) en ninguna completación válida. Luego toda triplete extraída de L pertenece a M . Así,

$$M' \subseteq M, \quad |M'| = q,$$

y sus tripletas son disjuntas en las tres coordenadas. Por tanto, M' es un acoplamiento perfecto de la instancia de ACTRI.

Hemos demostrado la equivalencia

$$(W, X, Y, M) \text{ admite un acoplamiento} \iff P \text{ es completable.}$$

4. Complejidad de la transformación

Como se ha comentado en apartados anteriores, la construcción utiliza una fila principal por cada elemento de W , una columna principal por cada elemento de X y un símbolo principal por cada elemento de Y . Además, para cada triplete no permitida de $(W \times X \times Y) \setminus M$ se añade únicamente un conjunto de elementos auxiliares y entradas prefijadas de tamaño polinómico. Esto se observa claramente en que

$$|W \times X \times Y| = q^3,$$

luego el número de tripletas que se recorren es polinómico en q .

La tabla parcial se construye recorriendo todas las tripletas de $W \times X \times Y$, comprobando si pertenecen a M , e introduciendo el bloqueo correspondiente cuando no pertenecen. Este procedimiento requiere tiempo polinómico en el tamaño de la instancia.

Como ACTRI es NP-completo y se reduce en tiempo polinómico al problema de completar cuadrados latinos parciales, dicho problema es NP-difícil.

Conclusión

Hemos probado que el problema pertenece a NP y que ACTRI, que es NP-completo, se reduce en tiempo polinómico al problema de completar cuadrados latinos parciales. Por consiguiente,

COMPLETACIÓN DE CUADRADOS LATINOS es NP-completo.

La demostración se inspira en la reducción clásica de Colbourn para la NP-completitud de la completación de cuadrados latinos parciales, modificada para realizar una reducción a uno de

los problemas vistos en la teoría de la asignatura. En la reducción original, las filas, columnas y símbolos se interpretan como las tres partes de una estructura tripartita, y completar una celda con un símbolo corresponde a seleccionar una tripleta compatible. En nuestro caso formulamos esta idea directamente desde ACTRI.

Referencias

- [1] C. J. Colbourn, “The Complexity of Completing Partial Latin Squares”, *Discrete Applied Mathematics* 8 (1984), 25–30.