

Practica MAC: Corte máximo

Airam Falcón Marrero

June 4, 2026

1 Introducción

Vamos a tratar el problema del corte máximo.

Trabajaremos con la siguiente notación: G es un grafo, con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E . No podremos utilizar que $|E| \leq \frac{|V|(|V|-1)}{2} < |V|^2$, ya que trabajaremos con un grafo que puede tener varias aristas entre 2 nodos. Utilizaremos la codificación del grafo que primero lista los vértices y después las aristas (ambas con su respectiva codificación).

Definimos un corte en un Grafo como la separación de V en conjuntos disjuntos de vértices. Cuando hablemos del tamaño de un corte, hablamos del número de aristas que se borran al separar el grafo en 2. Los cortes los representaremos como conjuntos disjuntos de vértices, y los notaremos por V_1 y V_2

Con esta notación fijada, podemos definir el problema:

*Dado un grafo G y un entero k , decidir si existe un **corte** de tamaño mayor o igual que k .*

2 Pertenece a NP

Veamos que es NP: Sea x una codificación del grafo ($\langle V \rangle \# \langle E \rangle$), seguida del entero k . Sea y la codificación de dos listas de vértices, que representan el corte.

Como los vértices aparecen con la misma codificación en x , podemos decir con seguridad que $|y| \leq p(|x|)$ para p un polinomio.

Consideremos el siguiente algoritmo: (Suponemos $\langle y \rangle = \langle V_1 \rangle \# \langle V_2 \rangle$)

```

inicializar  $contador \leftarrow 0$  //  $O(1)$ 
Para cada  $u \in V_1$  hacer //  $O(|x|)$ 
  Para cada  $v \in V_2$  hacer //  $O(|x|)$ 
    Si  $(u, v) \in E$  entonces //  $O(|x|)$ 
       $contador \leftarrow contador + 1$  //  $O(\log |x|)$ 
Si  $contador \geq k$  entonces
  Retornar 1 // Certificado válido
Else
  Retornar 0 // Certificado inválido

```

Está claro que este algoritmo define un verificador polinómico para el problema de decisión asociado al corte máximo. Por tanto, el problema de decisión está en NP.

3 Es completo para NP

Vamos a realizar una reducción en espacio logarítmico del problema NAESAT (Not all equal 3SAT) al problema del corte máximo.

Supongamos que tenemos un conjunto de variables $U = \{p_1, \dots, p_n\}$ y un conjunto de clausuras $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, en donde las clausuras tienen exactamente 3 variables. $n := \text{card}(U)$, $m := \text{card}(C)$.

Construiremos un grafo a partir de estos datos para realizar la reducción:

3.1 Reducción:

Para simplificar el lenguaje, diremos que el grafo tiene una arista (u, v) de u a v si existe la arista de u a v .

La idea es representar por V_1 a las variables que reciben valoración verdadero, y por V_2 a las que reciban valoración falso.

Si creamos un grafo $G = (V, E)$, en donde los nodos representan a una variable o la negación de una variable ($V = \{x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n\}$) y las aristas las construimos de la siguiente manera:

Por cada vez que aparezca una variable en una cláusula, añadimos una arista entre la variable y su complementario.

Para cada cláusula $c = (l_1, l_2, l_3)$, añadimos las aristas $(l_1, l_2), (l_2, l_3), (l_3, l_1)$ Llamamos a los (l_1, l_2, l_3) triángulos.

Este grafo es claro que se puede construir en espacio logarítmico si juntamos los procesos descritos:

Escribo V en la salida mientras voy leyendo U .

Para cada $c \in C$ con $c = (l_1, l_2, l_3)$ **hacer**

Lo copio en una var aux.

Añado $(l_1, \neg l_1), (l_2, \neg l_2), (l_3, \neg l_3) \in E$.

Añado $(l_1, l_2), (l_2, l_3), (l_3, l_1) \in E$.

Esta reducción es de espacio logarítmico, pues $|c| \in O(\log(|V| + |C|))$.

Por último, elegimos $k = 5m$.

Veamos que la reducción es válida. Para ello, vemos que dado un triángulo como los de antes, se tiene que el triángulo (l_1, l_2, l_3) aporta 2 al corte $\iff$ Al menos uno es cierto y otro es falso, es decir $\{l_1, l_2, l_3\} \cap V_1 \neq \emptyset, \{l_1, l_2, l_3\} \cap V_2 \neq \emptyset$. Esto es decir que se cumple la cláusula asociada al triángulo con la condición de que no todos sean iguales.

Es claro que un triángulo no puede aportar 3 aristas al tamaño del corte, puesto que, por principio del palomar, al menos dos vértices acabarán en el mismo subconjunto.

Deduce que se cortan a lo sumo $2m$ aristas de los introducidos como triángulos. Para obtener un corte de tamaño $5m$, deberán cortarse todas las aristas que introducimos entre una variable y su complementario. Como hay n cláusulas y 3 variables por cláusula, se dan un total de $3m$ aristas de esta forma.

Demostremos que existe un corte de tamaño $5m \iff$ NAESAT responde que SI.

[$\Leftarrow$] NAESAT responde SI $\Rightarrow \exists v : U \rightarrow \{0, 1\}$ valoración tal que todas las cláusulas son evaluadas verdaderos. Construimos el corte siguiente:

$$V_1 = \{x \in U : v(x) = 1\} \cup \{\neg x / x \in U \wedge v(x) = 0\}, V_2 = V \setminus V_1$$

De esta forma es inmediato que $x \in V_1 \iff \neg x \in V_2 \Rightarrow$ Se cortan las aristas que unen x y su complementario $\Rightarrow$ Se cortan $3m$ aristas de esta forma.

Además, por el razonamiento anterior, por cada triángulo se cortan 2 aristas $\Rightarrow$ Se cortan $2m$ aristas asociadas a triángulos. Concluimos que se cortan $5m$ aristas.

[$\Rightarrow$] $\exists$ corte (V_1, V_2) de tamaño $5m$. Por lo expuesto anteriormente, sabemos que

la valoración $v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V_1 \\ 0 & \text{si } \neg x \in V_1 \end{cases}$ está bien definida y que hace verdaderas

todas las cláusulas. Por tanto NAESAT responde SI.

