

Modelos Avanzados de Computación

Trabajo de NP-completitud
Problema del Conjunto Dominante

Curso 2025-2026

José Juan Urrutia Milán

Grupo A1

1. Descripción del Problema

Describimos a continuación el problema del Conjunto Dominante (CD):

- **Entrada:** Un grafo $G = (V, E)$ y $K \in \mathbb{N}$ con $K \leq |V|$.
- **Decisión:** Determinar si existe $V' \subseteq V$ con $|V'| \leq K$ y tal que:

$$\forall v \in V \setminus V' \quad \exists u \in V' \text{ de forma que } (v, u) \in E \vee (u, v) \in E$$

Así, notaremos por $CD(G, K)$ a una instancia del problema.

2. Demostración de NP-completitud

2.1. Parte 1

En primer lugar hemos de probar que CD es un problema de NP. Para ello, el siguiente Algoritmo puede implementarse en una Máquina de Turing no Determinista.

Este algoritmo primero construye de forma no determinista y en tiempo $O(|V|)$ el conjunto V' y luego comprueba que tenga un tamaño menor o igual que K . Posteriormente comprueba en tiempo $O(|V| \cdot K \cdot |E|)$ que V' sea un conjunto dominante, para cada vértice $v \in V$:

- bien $v \in V'$, en cuyo caso al recorrer los vértices $u \in V'$ encontraremos $u = v$, de donde **encontrado** = **true** y no necesitamos verificar nada más para este vértice v .
- bien $v \in V \setminus V'$, en cuyo caso al recorrer $u \in V'$ siempre mantendremos **encontrado** = **false**. Al recorrer $e \in E$ hay dos posibilidades:
 - bien algún $e = (u, v)$ ó $e = (v, u)$, en cuyo caso se pondrá en algún momento **conectado** = **true**.
 - bien se mantendrá **conectado** = **false**, pues no encontraremos una arista de dicha forma, de donde el algoritmo terminará y dirá NO.

Así, hemos visto que el algoritmo es correcto. Además, sea n la longitud total de la entrada al algoritmo, CD exige que $K \leq |V|$ y tendremos que $|V|, |E| \leq n$, de donde el algoritmo tiene orden temporal $O(n^3)$, por lo que el problema es NP.

Algoritmo 1

Entrada: La codificación de un grafo $G = (V, E)$ y un número $K \leq |V|$ en binario.

$V' = \{\}$

Para cada vértice $v \in V$ **hacer**

Elegir de forma no determinista si incluir v en V' .

Fin Para

Si tamaño(V') $> K$ **entonces** Terminar algoritmo y decir “NO”.

Para cada vértice $v \in V$ **hacer**

encontrado = false

conectado = false

Para cada vértice $u \in V'$ **y mientras** encontrado = false **hacer**

Si $v = u$ **entonces** encontrado = true

En otro caso

Para cada arista $e \in E$ **hacer**

Si $e = (u, v)$ ó $e = (v, u)$ **entonces** conectado = true

Fin Para

Fin Si

Fin Para

Si no encontrado **entonces** // $v \in V \setminus V'$

Si no conectado **entonces** Terminar algoritmo y decir “NO”.

Fin Si

Fin Para

Terminar algoritmo y decir ‘SÍ’.

2.2. Parte 2

Ahora hemos de ver que un problema NP-completo se reduce a $CD(G, K)$. En vista de la formulación del problema, pensamos que el problema del Cubrimiento por Vértices (CV) es el apropiado, pues son muy similares:

- **Entrada:** Un grafo $G = (V, E)$ y $J \in \mathbb{N}$ con $J \leq |V|$.
- **Decisión:** Determinar si existe $V' \subseteq V$ con $|V'| \leq J$ y tal que:

$$\forall (u, v) \in E \quad u \in V' \vee v \in V'$$

2.2.1. Ideas de la demostración

Así, queremos demostrar la reducción $CV(G, J) \propto CD(G, K)$. Pensando sobre como relacionar los dos problemas, intuitivamente podemos decir que:

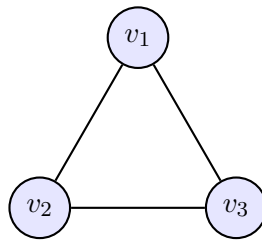
- Un conjunto dominante es un subconjunto de los vértices (a los que llamaremos dominantes) que “dominan” a todos los vértices del grafo.

Entendiendo que un vértice dominado es un vértice que bien es dominante o bien es adyacente a uno dominante.

- Un cubrimiento por vértices es un subconjunto de los vértices que “dominan” todas las aristas.

Aquí entendemos que dominar una arista significa que todas las aristas cuentan con un vértice de este subconjunto especial.

Podemos estar tentados a pensar que en un grafo $G = (V, E)$ “todo CD es un CV” y de ahí decir que la reducción $CV(G, J) \propto CD(G, K)$ es trivial, pero esta implicación es falsa, pues en el grafo:



El conjunto $\{v_1\}$ es un CD pero no es un CV, pues la arista $(v_2, v_3) \in E$ no está dominada.

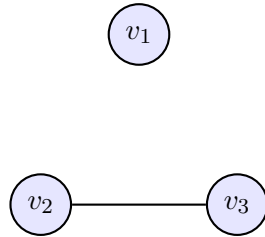
Por otra parte, ¿todo CV es un CD?

Proposición 2.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo sin vértices aislados, si $V' \subseteq V$ es un CV entonces V' es un CD.

Demostración. Sea $v \in V \setminus V'$, como v es un vértice de G y G no tiene vértices aislados, entonces debe existir $e \in E$ de forma que e conecte v con otro vértice $u \in V$. Como V' es un CV debemos tener que $u \in V'$. $\square$

La hipótesis extra de que G sea un grafo sin vértices aislados se debe a que en un grafo cualquiera G debemos asegurarnos de que un CV V' contiene todos los vértices aislados para poder asegurar que es un CD.

Ejemplo. En el siguiente grafo tenemos que $\{v_2\}$ es un CV pero no un CD, puesto que no domina al vértice v_1 . Para transformar este CV en un CD debemos incluir el vértice v_1 : $\{v_1, v_2\}$ sí es un CD.



La Proposición 2.1 nos ayuda bastante a la hora de probar que $CD(G, K)$ es un problema NP-completo, pues buscamos un algoritmo $ALG(G, J) \in L$ de modo que:

$$SÍ = CV(G, J) \iff SÍ = CD(ALG(G, J))$$

Con ayuda de la Proposición tenemos que si G no tiene vértices aislados entonces:

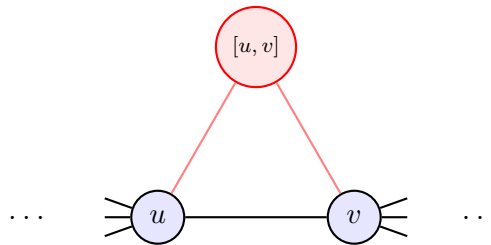
$$SÍ = CV(G, J) \implies SÍ = CD(G, J)$$

Así, basta buscar una estrategia (modificaciones espacio-logarítmicas sobre G y J) para ver que si $NO = CV(G, J)$ entonces $NO = CD(G', J')$, sin perder la propiedad superior.

Así, si $NO = CV(G, J)$ entonces no existe un recubrimiento por vértices de G de menos de J vértices, es decir:

$$\forall V' \subseteq V : |V'| \leq J \exists (u, v) \in E \text{ con } u, v \notin V'$$

Bajo estas hipótesis, ¿cómo aseguramos que G' no tenga un CD? Si a cada arista $(u, v) \in E$ añadimos un nuevo vértice que solo se conecte con u y v , y mantenemos $J' = J$:



Como siempre tendremos la existencia de una arista que no sea dominada al no existir un CV, al añadir este nuevo nodo parece que es más difícil dominar todos los nodos. Además, si $SÍ = CV(G, J)$, entonces en cada $(u, v) \in E$ tendremos que bien $u \in V'$ o bien $v \in V'$, por lo que al añadir los vértices $[u, v]$ y si G no tiene vértices aislados tendremos que V' será también un CD, por la Proposición 2.1 y por dominar ahora a $[u, v]$ gracias a su vecindad con u y v .

2.2.2. Demostración

Motivados todos los pasos que haremos, procedemos con la demostración rigurosa. Proponemos el algoritmo $\text{ALG}(G, J)$, que dados un grafo $G = (V, E)$ y $J \in \mathbb{N}$ con $J \leq |V|$ da como salida un nuevo grafo G' y K de modo que:

- G' es el grafo obtenido tras aplicar al grafo G :
 - Eliminar todos los vértices aislados de G .
 - Para cada arista $(u, v) \in E$, añadir el nuevo nodo $[u, v]$ y las aristas $([u, v], u)$ y $([u, v], v)$.
- $K = J$.

Algoritmo 2

Entrada: La codificación de un grafo $G = (V, E)$ y un número $J \leq |V|$ en binario.

Salida: Se escribe en la cinta de salida un grafo G' y un número K en binario.

Para cada $v \in V$ **hacer**

Guardar el índice de la casilla donde empieza v en binario: i_v .
aislado = **true**

Para cada $(u, w) \in E$ **y mientras** aislado = **true** **hacer**

Guardar el índice de la casilla donde empieza (u, w) en binario: i_{copia} .
Si $v = u$ **ó** $v = w$ **entonces** aislado = **false**

Fin Para

Si aislado = **false** **entonces**

Escribir v en la cinta de salida.

Fin Si

Fin Para

Para cada $(u, v) \in E$ **hacer**

Guardar en i_{copia} el índice donde empieza (u, v) en binario.
Escribir $[u, v]$ en la cinta de salida como un vértice de G' .

Fin Para

Para cada $(u, v) \in E$ **hacer**

Guardar en i_{copia} el índice donde empieza (u, v) en binario.
Escribir (u, v) en la cinta de salida como una arista de G' .
Escribir $([u, v], u)$ en la cinta de salida como una arista de G' .
Escribir $([u, v], v)$ en la cinta de salida como una arista de G' .

Fin Para

Guardar en i_{copia} el índice donde empieza J .

Copiar J en la cinta de salida como K .

El espacio empleado en $ALG(G, J)$ es constante, salvo el empleado para almacenar los índices i_v e i_{copia} . Estos son índices que referencian en binario posiciones a lo largo de la cinta de entrada, por lo que ocupan un espacio logarítmico. Así, tenemos que $ALG(G, J) \in L$.

Ahora, hemos de comprobar que:

$$CV(G, J) = CD(ALG(G, J)) \quad \forall \text{ grafo } G = (V, E), \quad \forall J \leq |V|$$

Para ello, sea $G = (V, E)$ un grafo y $J \in \mathbb{N}$ con $J \leq |V|$, distinguimos casos:

Si $CV(G, J) = \text{SÍ}$

En este caso tenemos que $\exists \mathcal{V} \subseteq V$ con $|\mathcal{V}| \leq J$ de forma que:

$$\forall (u, v) \in E \quad u \in \mathcal{V} \vee v \in \mathcal{V}$$

Sea $\overline{V}$ el conjunto de todos los vértices aislados de V :

$$\overline{V} = \{v \in V : \nexists e \in E, u \in V \text{ con } e = (u, v) \vee e = (v, u)\}$$

Por la definición de cubrimiento por vértices vemos que $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \overline{V}$ seguirá siendo un CV de G con $|\mathcal{V}'| \leq |\mathcal{V}| \leq J$, y también lo será del grafo $(V \setminus \overline{V}, E)$, que no tiene vértices aislados, por lo que $\mathcal{V}'$ es un CD de este grafo gracias a la Proposición 2.1.

Sea ahora $(G', K) = ALG(G, J)$, vemos que $(V \setminus \overline{V}, E)$ es un subgrafo del grafo $G' = (V', E')$, por lo que para que $\mathcal{V}'$ sea un CD de G' basta ver que los vértices de la forma $[u, v]$ están dominados por $\mathcal{V}'$.

Para ello, si $[u, v] \in V'$ debe existir por su construcción $(u, v) \in E$, y como $\mathcal{V}'$ es CV de G debemos tener:

- bien $u \in \mathcal{V}'$, con lo que $[u, v]$ queda dominado por u al tener $([u, v], u) \in E'$.
- bien $v \in \mathcal{V}'$, con lo que $[u, v]$ queda dominado por v al tener $([u, v], v) \in E'$.

Así, acabamos de probar que $\mathcal{V}'$ es un CD de G' con $|\mathcal{V}'| \leq J = K$, con lo que podemos afirmar que:

$$\text{SÍ} = CD(G', K) = CD(ALG(G, J))$$

Si $CV(G, J) = \text{NO}$

Tenemos que $\nexists \mathcal{V} \subseteq V$ con $|\mathcal{V}| \leq J$ de forma que:

$$\forall (u, v) \in E \quad u \in \mathcal{V} \vee v \in \mathcal{V}$$

Es decir, $\forall \mathcal{V} \subseteq V$ con $|\mathcal{V}| \leq J$ se tiene que:

$$\exists (u, v) \in E \quad u, v \in V \setminus \mathcal{V}$$

Sea $(G', K) = ALG(G, J)$, tenemos $G' = (V', E')$. Por reducción al absurdo, suponemos que:

$$\exists \mathcal{V}' \subseteq V' \text{ con } |\mathcal{V}'| \leq J \text{ CD de } G'$$

Podemos considerar ahora:

$$\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{V}' \setminus \{[u, v] \in V' : (u, v) \in E\} \subseteq V$$

con $|\bar{\mathcal{V}}| \leq |\mathcal{V}'| \leq J$, por lo que por hipótesis (no existe CV de G) sabemos que $\exists (u, v) \in E$ con $u, v \in V \setminus \bar{\mathcal{V}}$. Además, por ser E un conjunto finito, debe existir una cantidad finita de dichos arcos, $B \in \mathbb{N}$, que podemos agrupar en el conjunto:

$$\Lambda = \{(u, v) \in E : u, v \in V \setminus \bar{\mathcal{V}}\}$$

De $u, v \in V \setminus \bar{\mathcal{V}}$ deducimos que $u, v \notin \mathcal{V}'$. Ahora, como $\mathcal{V}'$ es un CD de G' y los vértices adyacentes a $[u, v] \in V'$ solo son u y v deducimos que debemos tener $[u, v] \in \mathcal{V}'$. De esta forma, en realidad teníamos que $|\bar{\mathcal{V}}| \leq J - 1$ (pues $\bar{\mathcal{V}}$ no puede contener a $[u, v]$). Este mismo razonamiento podemos repetirlo para cada elemento de Λ , obteniendo así que en realidad:

$$|\bar{\mathcal{V}}| \leq J - B$$

Ahora, definimos:

$$\tilde{\mathcal{V}} = \bar{\mathcal{V}} \cup \{u \in V : \exists v \in V \text{ con } (u, v) \in \Lambda\} \subseteq V$$

Observemos que $\tilde{\mathcal{V}}$ es un CV de G , ya que si $(u, v) \in E$ tenemos dos opciones:

- Bien $u \in \bar{\mathcal{V}}$ ó $v \in \bar{\mathcal{V}}$, por lo que (u, v) queda dominada por $\tilde{\mathcal{V}}$.
- Bien $u, v \in V \setminus \bar{\mathcal{V}}$, pero entonces tenemos que $(u, v) \in \Lambda$, de donde $u \in \tilde{\mathcal{V}}$ por definición.

Pero también de $|\bar{\mathcal{V}}| \leq J - B$ y de $|\Lambda| = B$ deducimos que $|\tilde{\mathcal{V}}| \leq J$, hemos llegado a una contradicción, pues G no podía tener ningún CV de menos de J vértices. Acabamos de probar que:

$$\nexists \mathcal{V}' \subseteq V' \text{ con } |\mathcal{V}'| \leq J \text{ CD de } G'$$

Es decir, que:

$$\text{NO} = \text{CD}(G', K) = \text{CD}(\text{ALG}(G, J))$$

Así, acabamos de probar que:

$$\boxed{CV(G, J) \propto CD(G, K)}$$

Por lo que $\text{CD}(G, K)$ es NP-completo, ya que $\text{CV}(G, J)$ es NP-Completo.