Modelos Avanzados de Computación Examen I de Prácticas

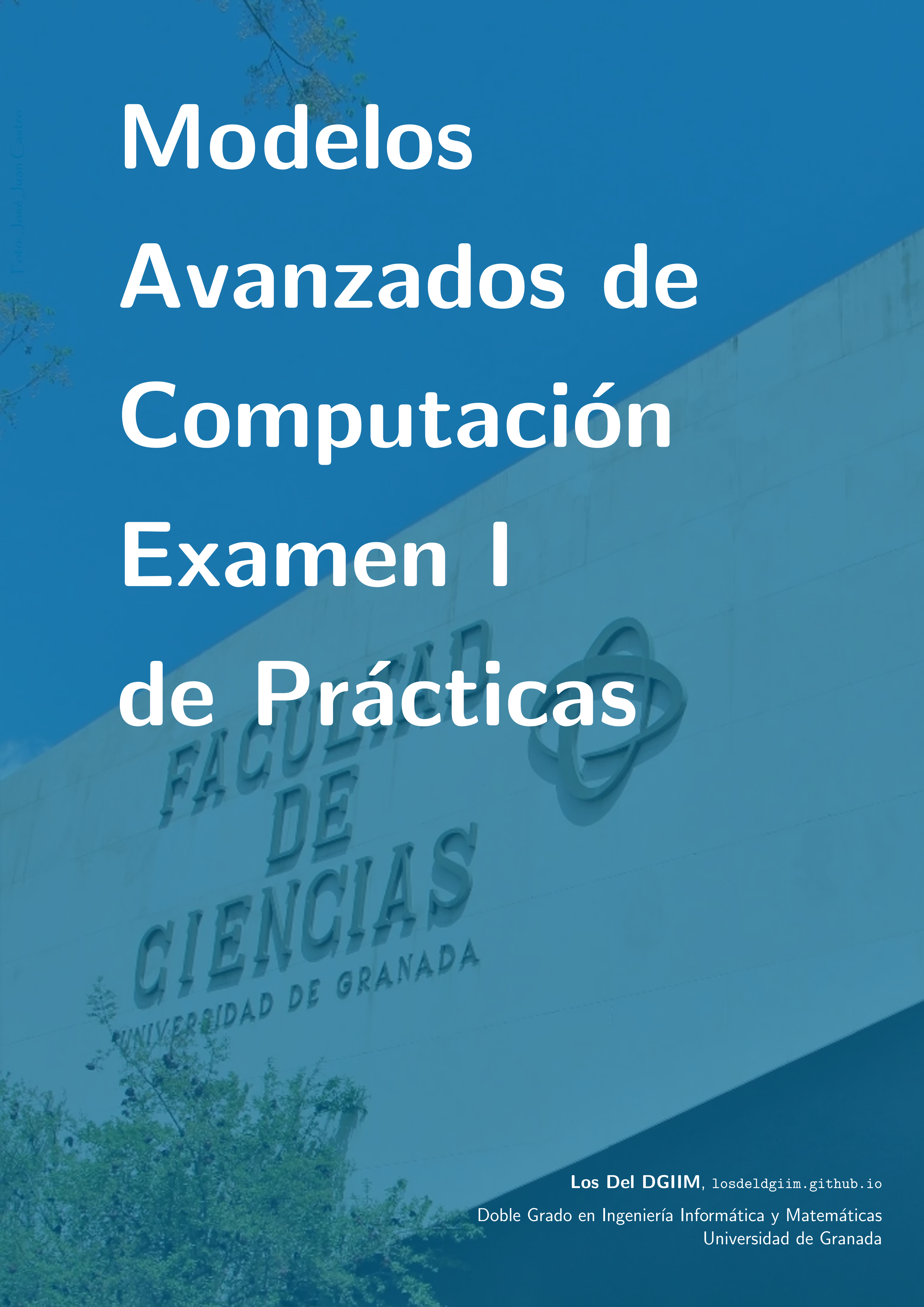

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos Avanzados de Computación Examen I de Prácticas

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2026

Asignatura Modelos Avanzados de Computación.

Curso Académico Desconocido.

Grado Grado en Ingeniería Informática.

Grupo Desconocido.

Profesor Desconocido.

Descripción Primer Examen de Prácticas.

Fecha Desconocida.

Duración Desconocida.

Ejercicio 1. Escribir explícitamente una MT que acepte el siguiente lenguaje:

$$\{ucv : u, v \in \{0,1\}^* \text{ con } u \geqslant v\}$$

Ejercicio 2. Escribir explícitamente una MT que, dada una entrada $u \in \{0,1\}^*$, devuelva $3u$.

Ejercicio 1. Escribir explícitamente una MT que acepte el siguiente lenguaje:

$$\{ucv : u, v \in \{0,1\}^* \text{ con } u \geqslant v\}$$

Recordemos que, por definición, si $v, u \in A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, con A un alfabeto, entonces:

$$v \leqslant u \iff \begin{cases} v = u \\ |v| < |u| \\ |v| = |u| \text{ y } v \text{ precede a } u \text{ en orden alfabético, con } a_1 < \cdots < a_n \end{cases}$$

Por tanto, consideramos el lenguaje

$$L = \{ucv : u, v \in \{0,1\}^* \text{ con } u \geqslant v\} = \{ucv : u, v \in \{0,1\}^* \text{ con } v \leqslant u\}$$

La idea será utilizar una MT con 3 cintas:

1. En la primera, la entrada original.
2. En la segunda, u.
3. En la tercera, v.

y las subrutinas serán las siguientes:

1. Copiar u en la cinta 2 y v en la cinta 3.
2. Comparar longitudes. Si $|u| \neq |v|$, entonces:
   - Si $|v| < |u|$, aceptar (enviar a estado final)
   - Si $|v| > |u|$, rechazar (enviar a un estado sin transiciones por ejemplo).
3. Si $|u| = |v|$, comparar bit a bit de izquierda a derecha. Si en algún momento difieren:
   - Si el primer símbolo en que difieren es 1 en u y 0 en v, aceptar.
   - Si es al revés, rechazar.
4. Si no difieren en ningún símbolo, aceptar.

Un ejemplo sería la MT

$$M = (Q, A, B, \delta, q_0, \#, \{q_6\})$$

con

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$$
$$A = \{0, 1, c\}$$
$$B = \{0, 1, c, \#\}$$

El significado de los estados es el siguiente:

1. q_0: Copiar u de la cinta 1 a la cinta 2.
2. q_1: Copiar v de la cinta 1 a la cinta 3.
3. q_2: Posicionar el cabezal de las cintas 2 y 3 al principio.
4. q_3: Comparar longitudes.
5. q_4: Si $|v| = |u|$, reposicionar el cabezal de las cintas 2 y 3 nuevamente al principio.
6. q_5: Comparar lexicográficamente.
7. q_6: Aceptar las palabras de L.

Para rechazar, se enviará a estados para los que no haya transiciones definidas, parando M y rechazando. Se entenderá, cuando aparezcan, que $a, b \in \{0, 1\}$.

Copia de u a la cinta 2

$$\delta(q_0, a, \#, \#) = (q_0, a, a, \#, D, D, S)$$
$$\delta(q_0, c, \#, \#) = (q_1, c, \#, \#, D, S, S)$$

Copia de v a la cinta 3

$$\delta(q_1, a, \#, \#) = (q_1, a, \#, a, D, S, D)$$
$$\delta(q_1, \#, \#, \#) = (q_2, \#, \#, \#, S, S, S)$$

A partir de aquí la cinta 1 se quedará estática (S) siempre, y siempre se leerán blancos ($\#$) en esta cinta. Ya no nos interesa su contenido.

Posicionar el cabezal de las cintas 2 y 3 al principio

$$\delta(q_2, \#, a, b) = (q_2, \#, a, b, S, I, I)$$
$$\delta(q_2, \#, \#, a) = (q_2, \#, \#, a, S, S, I)$$
$$\delta(q_2, \#, a, \#) = (q_2, \#, a, \#, S, I, S)$$
$$\delta(q_2, \#, \#, \#) = (q_3, \#, \#, \#, S, D, D)$$

Comparar longitudes

$$\delta(q_3, \#, a, b) = (q_3, \#, a, b, S, D, D)$$

Ahora, si leo un blanco antes en la cinta 3 que en la 2, es porque $|v| < |u| \iff v \leqslant u$, por lo tanto, hay que aceptar, cosa que hacemos con la siguiente transición:

$$\delta(q_3, \#, a, \#) = (q_6, \#, a, \#, S, S, S)$$

Si por el contrario se llegara a un estado de la forma $(q_3, \#, \#, a)$, querría decir que se leería un blanco antes en la cinta 2 que en la 3, es decir, que $|v| > |u|$, por lo tanto, hay que rechazar, para lo cual no se define ninguna transición.

En otro caso, las palabras tienen la misma longitud, por lo que se llega a:

$$\delta(q_3, \#, \#, \#) = (q_4, \#, \#, \#, S, S, S)$$

Al llegar a q_4, sabemos que $|v| = |u|$, por lo que consideramos la primera y tercera posibilidad de la definición de $v \leqslant u$.

Si $|v| = |u|$, reposicionar el cabezal de las cintas 2 y 3 al principio

$$\delta(q_4, \#, a, b) = (q_4, \#, a, b, S, I, I)$$

Aquí usamos que, en este punto, ambas palabras tienen la misma longitud, por lo que si movemos ambos cabezales a la izquierda desde el final de cada palabra, ambos leerán blanco al mismo tiempo, por lo que no hacen falta las dos transiciones intermedias que se habían definido en el anterior posicionamiento al principio. Una vez se llegue a blanco, necesariamente a la vez, en cada cinta, pasamos a la siguiente subrutina:

$$\delta(q_4, \#, \#, \#) = (q_5, \#, \#, \#, S, D, D)$$

Comparación lexicográfica de izquierda a derecha

$$\delta(q_5, \#, a, a) = (q_5, \#, a, a, S, D, D)$$

Ahora, quedan dos maneras de aceptar y una de rechazar. La primera de aceptar es que, aunque las longitudes sean iguales, el primer símbolo en que difieren es 1 en u y 0 en v, y como $0 < 1$, v precede a u, y $v \leqslant u$. Se ve reflejado en la siguiente transición:

$$\delta(q_5, \#, 1, 0) = (q_6, \#, 1, 0, S, S, S)$$

La segunda de aceptar es llegar al final en ambas palabras sin leer ningún carácter distinto después de comparar bit a bit de izquierda a derecha, en cuyo caso $v = u \iff v \leqslant u$:

$$\delta(q_5, \#, \#, \#) = (q_6, \#, \#, \#, S, S, S)$$

La manera de rechazar sería llegar al estado $(q_5, \#, 0, 1)$, ya que el primer símbolo en que difieren es 0 en u y 1 en v, de donde v no precede a u. Para rechazar no se define transición.

Ejercicio 2. Escribir explícitamente una MT que, dada una entrada $u \in \{0,1\}^*$, devuelva $3u$.

Usaremos que $3u = 2u + u$, y que $2u = u0$, y lo que quedará será sumar dos números en binario.

La idea será utilizar una MT con 4 cintas:

1. En la primera, la entrada original, que en primer lugar se copiará a la segunda, y luego se convertirá a $2u = u0$.
2. En la segunda, una copia de la entrada original u.
3. En la tercera, la suma $3u = 2u + u$ escrita al revés (de bit menos significativo a más significativo).
4. En la cuarta, salida final $3u$, en el orden correcto.

y las subrutinas serán las siguientes:

1. Copiar u en la cinta 1.
2. Después de copiar, escribir un 0 al final de la cinta 1, de tal manera que la cinta 1 contiene $2u$ y la cinta 2 contiene u.
3. Se suman ambos números en binario, de derecha a izquierda, con un estado para cuando haya acarreo, y otro para cuando no lo haya.
4. El resultado se escribe en la cinta 3 al revés.
5. Se copia la cinta 3 en la 4 recorriéndola de derecha a izquierda y se obtiene lo pedido.

Un ejemplo sería la MT

$$M = (Q, A, B, \delta, q_0, \#, \{q_5\})$$

con

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$
$$A = \{0, 1\}$$
$$B = \{0, 1, \#\}$$

El significado de los estados es el siguiente:

1. q_0: Copiar u de la cinta 1 a la cinta 2. Al terminar de copiar, añadir un 0 en la cinta 1, obteniendo $2u$.
2. q_1: Sumar con acarreo 0.
3. q_2: Sumar con acarreo 1.
4. q_3: Preparar para copiar al revés.
5. q_4: Copiar de la cinta 3 en la 4 al revés.
6. q_5: Aceptar.

Se rechazará igual que antes, y también igual que antes, se entenderá, cuando aparezca, que $a \in \{0,1\}$, y que $\overline{a}$ es el complementario de a. Es decir, $(a,\overline{a}) \in \{(0,1),(1,0)\}$.

Copia de u a la cinta 2. Al terminar de copiar, añadir un 0 en la cinta 1

$$\delta(q_0, a, \#, \#, \#) = (q_0, a, a, \#, \#, D, D, S, S)$$

Se termina de copiar cuando se lee blanco en las dos cintas (1 y 2) a la vez, y en este punto se añade un 0 al final de la cinta 1, y se mueve a la izquierda el cabezal de la cinta 2 para empezar a sumar (hay que colocarlo en el último bit de u):

$$\delta(q_0, \#, \#, \#, \#) = (q_1, 0, \#, \#, \#, S, I, S, S)$$

Suma binaria con acarreo 0

Si sumo dos ceros, el resultado es un tercer cero en la cinta 3:

$$\delta(q_1, 0, 0, \#, \#) = (q_1, 0, 0, 0, \#, I, I, D, S)$$

Si sumo un uno y un cero, en el orden que sea, el resultado es un segundo uno en la cinta 3:

$$\delta(q_1, a, \overline{a}, \#, \#) = (q_1, a, \overline{a}, 1, \#, I, I, D, S)$$

Si sumo dos unos, pasaría a q_2 porque hay acarreo:

$$\delta(q_1, 1, 1, \#, \#) = (q_2, 1, 1, 0, \#, I, I, D, S) \tag{1}$$

Si no hay acarreo, como $|2u| > |u|$, quedará algún caracter por leer en la cinta 1 antes que en la 2, donde eventualmente se llegará al blanco.

$$\delta(q_1, a, \#, \#, \#) = (q_1, a, \#, a, \#, I, S, D, S)$$

Si ambas entradas han llegado a blanco y no hay acarreo terminaría la suma y se prepararía para invertir

$$\delta(q_1, \#, \#, \#) = (q_3, \#, \#, \#, S, S, I, S)$$

Suma binaria con acarreo 1

Si se aplicara la transición (1), a la entrada habría que sumarle un 1. Los sumandos pueden ser $(0,0),(1,0),(0,1)$ o $(1,1)$. Solo si se da el primero ya no tendríamos acarreo, y volveríamos a q_1:

$$\delta(q_2, 0, 0, \#, \#) = (q_1, 0, 0, 1, \#, I, I, D, S)$$

En los otros tres casos seguiremos teniendo acarreo:

$$\delta(q_2, a, \overline{a}, \#, \#) = (q_2, a, \overline{a}, 0, \#, I, I, D, S)$$
$$\delta(q_2, 1, 1, \#, \#) = (q_2, 1, 1, 1, \#, I, I, D, S)$$

Si la cinta 2 lee blanco, es porque se ha recorrido completamente u. Si se suma cero, terminará el acarreo, volviendo a q_1:

$$\delta(q_2, 0, \#, \#, \#) = (q_1, 0, \#, 1, \#, I, I, D, S)$$

Si se suma un uno, quedará un último acarreo:

$$\delta(q_2, 1, \#, \#, \#) = (q_2, 1, \#, 0, \#, I, S, D, S)$$

Si se terminan ambas entradas pero queda acarreo se escribe un uno adicional y se pasa a q_3 para terminar:

$$\delta(q_2, \#, \#, \#, \#) = (q_3, \#, \#, 1, \#, S, S, S, S)$$

Preparar para copiar al revés.

$$\delta(q_3, \#, \#, a, \#) = (q_4, \#, \#, a, \#, S, S, S, S)$$

Copia de la cinta 3 a la 4 al revés.

$$\delta(q_4, \#, \#, a, \#) = (q_4, \#, \#, a, a, S, S, I, D)$$

Al llegar al final a todo blanco aceptamos:

$$\delta(q_4, \#, \#, \#, \#) = (q_5, \#, \#, \#, \#, S, S, S, S)$$