

Analisi Funzionale

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Analisi Funzionale

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Joaquín Avilés de la Fuente

Granada, 2026

Índice general

1. Introduccion	5
2. Espacios normados	7
2.1. Teorema de Baire	11
2.2. Base de Schuader	13
2.3. Operadores lineales	15
2.3.1. Distancias equivalentes	23
2.3.2. Convergencia de series de operadores	25
2.4. Espacios normados de dimensión finita	27
3. Teorema de Hahn-Banach	33
3.1. Formulación analítica del teorema de Hahn-Banach	36
3.2. Espacio dual y reflexivo	40
3.3. Formulación geométrica del teorema de Hahn-Banach	43
3.4. Integración en espacios de Banach	45
3.4.1. Applicazioni	47
4. Principio de Acotación Uniforme	49
4.0.1. Aplicaciones	51
5. Teorema de la Aplicación Abierta	57
5.0.1. Aplicaciones	58
5.1. Teorema del Gráfico Cerrado	60
5.2. Ortogonalidad en espacios de Banach	62
5.3. Operadores no acotados	64
5.3.1. Operador Adjunto	65
6. Convergencia débil	69
6.1. Convergencia $*$ -débil	73
6.2. Espacios uniformemente convexos	76
6.3. Topologías débiles	78
7. Espacios de Hilbert	81
7.1. Ortogonalidad en espacios de Hilbert	86
7.2. Operador adjunto	90
7.3. Operadores compactos	95
8. Sistemas ortonormales completos	99

9. Teoría espectral	105
9.1. Operadores sobre los complejos	108
9.2. Operadores autoadjuntos	115
9.3. Formulación variacional	119
9.3.1. Análisis espectral de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)	124
10. Ejercicios	125
10.1. Folio 1	125
10.2. Folio 2	133
10.3. Folio 3	145
10.4. Folio 4	155

1. Introduccion

Antes de iniciar con el contenido teórico de la asignatura, debemos recalcar varios puntos a tener en cuenta.

El primero y más importante, aunque los apuntes estén en español, la asignatura está totalmente impartida en italiano, y el examen escrito está en italiano, por lo que es conveniente que se tenga en cuenta la traducción de ciertos conceptos y términos importantes, bien sean por ejemplo, *spazio vettoriale normato* (espacio vectorial normado), *spazio di Banach* (espacio de Banach), *spazio di Hilbert* (espacio de Hilbert), *operatore lineare* (operador lineal), *operatore limitato* (operador acotado), *operatore compatto* (operador compacto), *operatore autoaggiunto* (operador autoadjunto), *operatore unitario* (operador unitario), *operatore normale* (operador normal), *spettro* (espectro), etc.

La profesora que impartió la asignatura fue **Filomena Pacella**, con ella aunque el examen escrito esté en italiano, puedes resolverlo comentando lo que necesites en inglés, y además puedes hacer el examen oral en inglés.

El segundo punto a recalcar es que la nota final no se basa en la media aritmética entre el examen oral y escrito, sino que primero se hace la prueba escrita (que necesita ser aprobada para hacer el examen oral), y después se hace el examen oral, donde ella pone la nota final basándose gran parte en el examen oral, aunque como es obvio el escrito también tiene peso si se obtuvo con buena calificación.

Por último, como consejo para el examen oral, es conveniente tener control sobre la mayoría de definiciones, teoremas y resultados, pero lo que más se va a preguntar es la demostración de los teoremas más importantes de la asignatura (aquellos con nombre propio), como por ejemplo el teorema de Hahn-Banach, el teorema de Banach-Steinhaus, el teorema de Open Mapping, el teorema de Closed Graph, el teorema de Riesz Representation, etc.

2. Espacios normados

Definición 2.1. (Espacio normado) Un **espacio normado** es un par $(X, \|\cdot\|)$ donde X es un espacio vectorial real y $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que:

- 1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$.
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (Desigualdad triangular).

Observación. Todo espacio normado es un espacio métrico con la distancia definida por:

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

Por lo tanto, es posible trasladar el concepto de **convergencia fuerte** (o convergencia en norma) a los espacios normados.

Definición 2.2. (Convergencia fuerte) Sea $(x_n) \subseteq X$ una sucesión y sea $x \in X$. Decimos que x_n **converge fuertemente** a x ($x_n \rightarrow x$) si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Observación. ■ Se cumple la **desigualdad triangular inversa**: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. En efecto:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Análogamente se obtiene que $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$, de donde se deduce que:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

- La función $g(x) := \|x\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. De hecho, si $x_n \rightarrow x$, entonces:

$$|g(x_n) - g(x)| = |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| = g(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por tanto, $g(x_n) \rightarrow g(x)$.

- Se tiene que

$$\|x - y\| = \|(x - z) - (y - z)\| \quad \forall x, y, z \in X$$

de donde deducimos que $\|\cdot\|$ es una **distancia invariante por traslaciones**.

Es importante destacar que en el segundo punto de la observación anterior, se ha utilizado el hecho de que el límite de una función continua es la función del límite. Es decir, si $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $(x_n) \subseteq A$ es una sucesión que converge a $x \in A$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x)$$

Definición 2.3. (Sucesión de Cauchy) Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ se dice que es una **sucesión de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m > N \implies d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Definición 2.4. (Espacio de Banach) Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es un **espacio de Banach** si es completo con respecto a la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Es decir, si toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X .

Proposición 2.1. Sea X un espacio de Banach, y sea $Y \subseteq X$ un subespacio, entonces

$$Y \text{ espacio de Banach} \iff Y \text{ es cerrado}$$

Observación. Cuando hablamos de un espacio normado X y decimos que es de Banach, es importante saber que automáticamente estamos hablando del espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$, es decir, se da por hecho que existe una norma para ese espacio notada de la forma $\|\cdot\|_X$.

Definición 2.5. (Espacio Vectorial Topológico) Un **espacio vectorial topológico** es un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) que está equipado con una topología tal que las operaciones de suma y multiplicación por escalar son continuas. Es decir, las funciones:

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

y

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

son continuas con respecto a la topología dada en X .

Observación. Todo espacio vectorial normado es un espacio vectorial topológico, ya que la topología inducida por la norma hace que las operaciones de suma y multiplicación por escalar sean continuas.

Ejemplo. 1. $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ con la norma euclidiana $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ es un espacio de Banach. Espacio normado es trivial, para demostrar que es un espacio de Banach, tomamos una sucesión de vectores $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^n$ que sea de Cauchy. Esto significa que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tal que } \forall k, m > N \implies \|x^{(k)} - x^{(m)}\|_2 < \epsilon$$

Si escribimos los vectores por sus componentes: $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, observamos que para cada componente fija $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - x_j^{(m)})^2} = \|x^{(k)} - x^{(m)}\|_2 < \epsilon$$

La desigualdad anterior nos dice que si la sucesión de vectores es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, entonces cada una de las sucesiones de sus componentes $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por el análisis real básico, sabemos que $\mathbb{R}$ es completo. Por tanto, cada componente converge a un número real: $x_i^{(k)} \rightarrow x_i$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Definimos el vector límite como $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Como cada $x_i \in \mathbb{R}$, entonces $x \in \mathbb{R}^n$. Finalmente, como cada componente converge, la norma de la diferencia tiende a cero

$$\|x^{(k)} - x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2} \rightarrow 0$$

2. $l_p = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\}$, $1 \leq p < +\infty$ es un espacio de Banach, con norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

De hecho,

$$l_{\infty} = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty\}$$

es un espacio de Banach, con norma $\|x\|_{\infty} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.

3. Los espacios $L^p(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, son espacios de Banach para todo $p \in [1, +\infty]$.

Definición 2.6. El espacio $L^p(\Omega)$ (donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ es un abierto) está formado por las funciones medibles $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que la integral de su valor absoluto elevado a p es finita. Matemáticamente, decimos que $f \in L^p(\Omega)$ si

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$$

De hecho, para $p = +\infty$, el espacio $L^{\infty}(\Omega)$ consiste en las funciones que están esencialmente acotadas, y la norma viene dada por

$$\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ para casi todo } x \in \Omega\}$$

Proposición 2.2. Para todo $p, p' \in (1, +\infty)$ se cumple la inclusión estricta $l_p \subsetneq l_{p'}$ siempre que $p < p'$.

Demostración. Sea $x \in l_p$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$$

lo que implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k|^p = 0$. Dado que la función potencia $f(t) = t^{1/p}$ es continua en 0 y usando en (*) que el límite de una función continua es la función del límite, podemos concluir que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} (|x_k|^p)^{1/p} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(|x_k|^p) \stackrel{(*)}{=} f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k|^p\right) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = 0^{1/p} = 0$$

Por tanto, existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k| < 1$ para todo $k > N$. Como $p < p'$, para estos términos se tiene que $|x_k|^{p'} \leq |x_k|^p$. Entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p'} = \sum_{k=1}^N |x_k|^{p'} + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^{p'} \leq \sum_{k=1}^N |x_k|^{p'} + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$$

Esto demuestra que $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_{p'}$, es decir, $l_p \subseteq l_{p'}$.

Para ver si la inclusión es estricta consideramos la sucesión $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k^{1/p}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, y vemos que $x \notin l_p$ para todo $p > 1$ (serie armónica divergente)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k^{1/p}}\right|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

pero $x_k \in l_{p'}$ (serie armónica generalizada convergente)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{1/p}}\right)^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p'/p}}$$

dado que $p < p'$, el exponente $\frac{p'}{p}$ es mayor que 1, y por el criterio de la serie armónica generalizada, esta serie converge (si el exponente del denominador es mayor que 1 converge). Por tanto, $x \in l_{p'}$, pero $x \notin l_p$, lo que demuestra que la inclusión es estricta. $\square$

Destacar que en la primera parte de la demostración se ha hecho uso del siguiente enunciado.

Proposición 2.3. (Criterio del límite) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión, tenemos que

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ no converge}$$

Ejercicio 1. Encontrar una sucesión $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$, pero que no pertenezca a ningún l_p para $p \in (1, +\infty)$.

Consideramos la sucesión $x_k = \frac{1}{\log(1+k)}$. Esta sucesión cumple que obviamente lo que primero se pide, es decir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(1+k)} = 0$$

Buscamos ahora demostrar que $x \notin l_p$ para todo $p \in (1, +\infty)$. Para ello, basta con demostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(1+k))^p} = +\infty, \quad \forall p \in (1, +\infty)$$

Para probarlo, recordamos que $\log(1+k) \leq k$, y demostremos ahora que para k grande se tiene que $(\log(1+k))^p \leq k$. Para ello, aplicamos el criterio de l'Hôpital al límite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(\log(1+k))^p}{k} \stackrel{l'Hopital}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{p(\log(1+k))^{p-1} \cdot \frac{1}{1+k}}{1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{p(\log(1+k))^{p-1}}{1+k} = 0$$

Si aplicamos el criterio de l'Hôpital $p-1$ veces más en (*), se obtiene que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(\log(1+k))^p}{k} \stackrel{(*)}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{p! \log(1+k)}{(1+k)^p} \stackrel{l'Hopital}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{p!}{(1+k)^{p+1}} = 0$$

Como el límite es 0, para k grande se tiene $(\log(1+k))^p \leq k$, y por tanto $\frac{1}{(\log(1+k))^p} \geq \frac{1}{k}$. Dado que $\sum \frac{1}{k}$ diverge, por el criterio de comparación, nuestra serie también diverge, y por tanto $x \notin l_p$ para todo $p \in (1, +\infty)$.

Proposición 2.4 (Desigualdad de Hölder). Si tenemos dos funciones medibles f y g definidas sobre un espacio de medida, la desigualdad nos dice que

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

Expresado de forma mucho más elegante utilizando la notación de normas L^p

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

2.1. Teorema de Baire

Definición 2.7. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto. Se dice que A es **raro** si $\overline{A}$ no contiene ningún abierto, notado como

$$\text{Int } \overline{A} = \emptyset$$

Definición 2.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto. Se dice que A es **denso** si

$$\overline{A} = X$$

Definición 2.9. Sea (X, d) un espacio métrico. $C \subseteq X$ es un **conjunto de I^a categoría** si C es la unión numerable de conjuntos raros, es decir:

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ con } A_n \text{ raros.}$$

Los conjuntos que no son de I^a categoría se dicen de II^a **categoría** (o **no magros**).

Teorema 2.5. (Teorema Nested-Balls) Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión de bolas cerradas encajadas, es decir, $B_{n+1} \subseteq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$$

Además, si tenemos $B_n = (x_n, r_n)$ con $r_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x\}$$

donde x es un único punto de X .

Demostración. (NO SE PIDE EN EL EXAMEN) Sea x_n el centro de cada bola B_n . Como $B_{n+1} \subseteq B_n$, para cualquier $m \geq n$ tenemos que $x_m \in B_m \subseteq B_n$. Dado que $x_m, x_n \in B_n$, la distancia entre ellos cumple:

$$d(x_m, x_n) \leq \text{diam}(B_n) \leq 2r_n$$

Como $r_n \rightarrow 0$, la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Al ser (X, d) un espacio completo, existe un punto $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Para un n fijo, todos los términos x_m con $m \geq n$ están contenidos en B_n . Como las bolas son cerradas, el límite x también debe pertenecer a B_n . Como esto es cierto para todo n , se tiene que:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

Finalmente, la unicidad es consecuencia de que el radio tiende a cero: si existieran dos puntos distintos x, y en la intersección, su distancia debería ser menor que $2r_n$ para todo n , lo que implica $d(x, y) = 0$ y, por tanto, $x = y$. $\square$

Teorema 2.6 (Teorema de Baire). Todo espacio métrico completo es de II^a categoría.

Demostración. (Equivalente a: la intersección de abiertos densos es densa).

Paso 1: Sea A un conjunto raro. Mostramos que cualquier bola cerrada en X contiene una bola cerrada que no interseca a A .

Sea B una bola cerrada. Como A es raro, su clausura $\overline{A}$ no contiene el interior de B ($B^\circ \not\subseteq \overline{A}$). Por tanto, $B \setminus \overline{A}$ contiene un abierto, ya que $B^\circ \setminus \overline{A} = B^\circ \cap (\overline{A})^c$ es un abierto no vacío y $B^\circ \setminus \overline{A} \subset B \setminus \overline{A}$.

Entonces, existe un punto $x \in B \setminus \overline{A}$ y un radio $R > 0$ tal que $B_R(x) \subseteq B \setminus \overline{A}$ es una bola abierta. Tenemos por tanto la bola cerrada $\overline{B_{R'}(x)} \subseteq B \setminus \overline{A} \subseteq B \setminus A$ con $R' < R$, donde hemos usado que por definición de clausura $\overline{A}$ es el conjunto más pequeño cerrado que contiene a A , por lo que $A \subseteq \overline{A}$.

Paso 2: Supongamos por reducción al absurdo que X es de primera categoría, es decir

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con cada } A_n \text{ raro}$$

Por el Paso 1, existe una bola cerrada B_1 tal que $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Análogamente, como A_2 es raro, existe una bola cerrada $B_2 \subseteq B_1$ tal que $B_2 \cap A_2 = \emptyset$ con radio $r_2 \leq r_1/2$.

Repitiendo el proceso, obtenemos una sucesión de bolas cerradas encajadas B_n tales que

$$B_n \cap A_n = \emptyset \text{ y } B_{n+1} \subseteq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como además $r_n \leq r_1/2^{n-1}$, se tiene que $r_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora, por el Teorema de las Bolas Encajadas, existe un punto $\bar{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

Sin embargo, $\bar{x} \notin A_n$ para todo n , lo que implica que $\bar{x} \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, lo cual es una contradicción, y por tanto tenemos que X es de II^a categoría. $\square$

Proposición 2.7. Sea Y un subespacio de un espacio normado X , entonces

$$Y \text{ es denso en } X \quad \text{o bien} \quad Y \text{ es raro}$$

Demostración. Supongamos que Y no es denso, es decir, $\bar{Y} \subsetneq X$. Mostremos que Y es raro, o sea, mostremos que $\bar{Y}$ no contiene bolas abiertas.

Supongamos por reducción al absurdo que $\exists B(\bar{x}, r) \subseteq \bar{Y}$. Sea $x \in X$, definimos $y = \bar{x} + \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|}$, entonces:

$$\|y - \bar{x}\| = \frac{r}{2} \implies y \in B(\bar{x}, r) \subseteq \bar{Y}$$

Como $\bar{Y}$ es un subespacio normado es un espacio vectorial topológico, entonces la suma de elementos es cerrada y la multiplicación por escalar es cerrada, por lo que

$$x = \frac{2\|x\|}{r}(y - \bar{x}) \in \bar{Y}$$

y por lo tanto, por la arbitrariedad de $x \in X$, se sigue que $\bar{Y} = X$, lo cual contradice la hipótesis inicial. $\square$

2.2. Base de Schuader

Definición 2.10. (Base) Una **base** de un espacio vectorial X es un subconjunto de X tal que cada $x \in X$ se escribe como una combinación lineal finita de elementos linealmente independientes de dicho subconjunto.

Corolario 2.7.1. Un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una base numerable.

Demostración. Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:

$$X = [\{e_n\}_{n=1}^{\infty}] = \bigcup_{m=1}^{\infty} [e_1, \dots, e_m] := \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$$

donde $E_m = [e_1, \dots, e_m]$ es el subespacio generado por los primeros m elementos de la base.

Por la proposición anterior, sabemos que cada E_m es raro o denso. Sin embargo, E_m no puede ser denso, ya que E_m es un subespacio de dimensión finita, y por lo tanto su clausura $\overline{E_m}$ tiene igual dimensión a E_m , lo que implica que $\overline{E_m} \subsetneq X$. Por tanto, cada E_m es raro para todo $m \in \mathbb{N}$.

Esto implica que $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ es una unión numerable de conjuntos raros, lo que contradice el Teorema de Baire, ya que X , al ser un espacio de Banach, debe ser de segunda categoría. $\square$

Definición 2.11. (Base de Schauder) Sea X un espacio normado. Una **base de Schauder** es un conjunto numerable $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $x \in X$, existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que:

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x) e_k \quad (2.1)$$

Equivalentemente, esto significa que la sucesión de sumas parciales converge a x en la norma de X :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^m \alpha_k(x) e_k \right\| = 0 \quad (2.2)$$

Observación. Para demostrar que un conjunto numerable es base de Schauder, hay que demostrar que la sucesión de escalares es única y que se cumple la igualdad 2.1, solo que esta igualdad podemos comprobarla también con el límite en 2.2

Definición 2.12. Un espacio métrico (o normado) X se dice **separable** si contiene un subconjunto denso que es numerable

Observación. Si X admite una base de Schauder, entonces X es separable con un conjunto denso numerable $Y = [\{e_m\}_{m \in \mathbb{Q}}]$. (El recíproco no es cierto).

Ejercicio 2.2.1. Sea $Z = [\text{polinomios en } t \in [a, b]]$. Demostrar que no es completo para ninguna norma.

Si demostramos que Z es de I^a categoría, entonces no es completo, por el Teorema de Baire. Demostramos que $\exists \{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ de conjuntos raros que cumplen $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = Z$. Consideramos $Z = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, donde

$$A_m = \{\text{polinomios de grado } \leq m \text{ en } t \in [a, b]\} = [\{t^n\}_{n=0}^m] = [\{1, t, t^2, \dots, t^m\}]$$

Dado que cada A_m es un subespacio de dimensión finita de Z , entonces A_m no es denso. Usando la propiedad vista anteriormente (Proposición 2.7), A_m es un conjunto raro para todo m . Por lo tanto, Z es una unión numerable de conjuntos raros, lo que significa que Z es de I^a categoría, y por el Teorema de Baire, Z no puede ser completo.

Ejercicio 2.2.2. Sea $X = [\text{polinomios en } t \in [0, 1/2]]$ con $\|\cdot\|_{\infty}$. Mostrar que no es completo.

Para demostrar que no es completo, encontramos una sucesión de Cauchy $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que no converge a un elemento de X . Definimos $p_m(t) = \sum_{k=0}^m t^k$. Entonces, para $m > n$:

$$|p_m(t) - p_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^m t^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |t|^k \quad (2.3)$$

Dado que $t \in [0, 1/2]$, tenemos que $|t|^k \leq (1/2)^k$. Por lo tanto:

$$\|p_m - p_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1/2]} |p_m(t) - p_n(t)| \stackrel{(10.3)}{\leq} \sup_{t \in [0, 1/2]} \sum_{k=n+1}^m |t|^k \leq \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Esta última expresión corresponde al resto de una serie geométrica convergente, por lo que tiende a 0 cuando $m, n \rightarrow +\infty$. Así, $\{p_m\}$ es una sucesión de Cauchy. Para ver esto un poco más claro, vamos a hacer el siguiente desarrollo teniendo en cuenta primero lo siguiente

$$\|p_m - p_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k < \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ahora buscamos demostrar que es de Cauchy, es decir, que $\|p_m - p_n\|_\infty \rightarrow 0$ cuando $m, n \rightarrow +\infty$. Para ello, dado $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^N < \epsilon$, esto se puede ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Por tanto, para todo $m > n > N$ se tiene que $\|p_m - p_n\|_\infty < \epsilon$, lo que demuestra que $\{p_m\}$ es de Cauchy.

Sabemos que para $|t| < 1$, la serie $\{p_m(t)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\frac{1}{1-t}$. De hecho, si una sucesión es de Cauchy en la norma infinito ($\|\cdot\|_\infty$), esa sucesión siempre converge uniformemente a alguna función continua f en el intervalo $[0, 1/2]$. Esto se debe a que el espacio de todas las funciones continuas ($C^0[0, 1/2]$) sí es completo (es un espacio de Banach). Por lo tanto, sabemos que la convergencia es uniforme en $[0, 1/2]$, y la función límite $f(t) = \frac{1}{1-t}$ no es un polinomio, por lo que $f \notin X$. Concluimos que X no es completo.

2.3. Operadores lineales

Definición 2.13. Sean X, Y espacios normados. $T : X \rightarrow Y$ es un **operador lineal** si:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X$$

Definición 2.14. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal, con X, Y espacios normados, entonces

- i) T se dice **continuo por sucesiones** en $x_0 \in X$ si para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ tal que $x_n \rightarrow x_0$, se tiene $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$.
Si X, Y son espacios métricos, entonces

$$T \text{ continuo} \iff T \text{ continuo por sucesiones}$$

- iii) T se dice **acotado** si $T(D)$ es acotado $\forall D \subseteq X$ acotado.

Definición 2.15. La **norma de un operador lineal** T (denotada como $\|T\|$) se define como la constante más pequeña M que hace que la desigualdad $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ sea cierta para todo $x \in X$. Formalmente:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

Observación. En el caso de T no acotado, tendríamos $\|T\| = \infty$ y por tanto dejaríamos hablar de norma estrictamente.

Proposición 2.8. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces

$$T \text{ es acotado} \iff \exists M > 0 \text{ tal que } \|T(x)\| \leq M \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$$

Demostración. $\Leftarrow$) Sea $D \subseteq X$ acotado, es decir, $D \subseteq B_r(x)$ para algún $r > 0$ y $x \in D$. Entonces:

$$\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\| \leq M \cdot r \implies T(D) \subseteq B_{M \cdot r}(x) \text{ es acotado}$$

Notar que aquí hemos usado una idea que se omite por simplicidad, veámosla a continuación.

Sabiendo que D está contenido en una bola cerrada $B_r(x)$, entonces para cada $y \in D$ se tiene que $\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| \leq r + \|x\|$. Por tanto, definiendo un nuevo radio como $r' = r + \|x\|$, tendríamos la desigualdad

$$\|y\| \leq r'$$

pero en la demostración anterior se abrevia nombrando otra vez r , para ahorrar notación, y porque realmente solo se necesita comprobar que $T(D)$ está contenido en una bola cerrada, sin importar realmente el radio de esta bola cerrada.

$\implies$) Supongamos por reducción al absurdo que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists x_m \in X \text{ tal que } \|T(x_m)\| > m \cdot \|x_m\| \implies \frac{\|T(x_m)\|}{\|x_m\|} > m \text{ con } x_m \neq 0$$

Como T es un operador lineal tenemos que

$$\frac{\|T(x_m)\|}{\|x_m\|} = \left\| T \left(\frac{x_m}{\|x_m\|} \right) \right\| > m \quad \text{con } \frac{x_m}{\|x_m\|} \in B_1(0).$$

De lo cual $T(B_1(0))$ no es acotado, y llegamos a una contradicción, quedando demostrado que $\exists M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ para todo $x \in X$. □

Proposición 2.9. Sean X, Y espacios normados. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Son equivalentes:

i) T es continuo en 0.

ii) T es continuo.

iii) T es acotado.

Demostración.

1 $\implies$ 2) Sea x_0 un punto arbitrario de X . Para cada sucesión $x_n \longrightarrow x_0$, se tiene que $x_n - x_0 \longrightarrow 0$, y por hipótesis, $T(x_n - x_0) \longrightarrow 0$.

Por linealidad del operador tenemos que

$$T(x_n) - T(x_0) = T(x_n - x_0) \longrightarrow 0 \implies T(x_n) \longrightarrow T(x_0)$$

por lo que, T es continuo en x_0 . Dado que x_0 es arbitrario, T es continuo.

2 $\implies$ 3) Demostremos que $\exists M$ tal que $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ para todo $x \in X$. Para ello, vamos a usar la continuidad de T en 0, veámoslo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in X, \|x\| < \delta \implies \|T(x)\| < \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = 1$, se tiene que si $\|x\| < \delta \implies \|T(x)\| < 1$. Para $x \in X$, definimos $x_\delta = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}$, entonces $\|x_\delta\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, y aplicando lo que hemos conseguido antes, tenemos que

$$\|T(x_\delta)\| < 1 \implies \left\| T\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < 1 \implies \|T(x)\| < \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$$

Como x es arbitrario, se tiene que $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ para todo $x \in X$, con $M = \frac{2}{\delta}$.

3 $\implies$ 1) Dado que T es acotado, $\exists M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ para todo $x \in X$. Para cada sucesión $x_n \longrightarrow 0$, se tiene que

$$0 \leq \|T(x_n) - 0\| \leq M \cdot \|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

lo que implica que $T(x_n) \longrightarrow 0$ por definición del límite, y por lo tanto T es continuo en 0.

□

Ejemplo. 1. La aplicación identidad $Id : X \longrightarrow X$ es un operador lineal.

2. Existen operadores lineales no continuos. Consideramos el espacio $X = (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ y el **operador de derivación** $T : X \longrightarrow X$ definido por $T(f) = f'$.

T no es un operador acotado. En efecto, si tomamos la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$, observamos que:

$$\blacksquare \quad \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$$\blacksquare f'_n(x) = nx^{n-1} \implies \|f'_n\|_\infty = n.$$

De esto se deduce que:

$$\|T(f_n)\|_\infty = \|f'_n\|_\infty = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Como $\|T(f_n)\|$ no está acotado para una sucesión de funciones con norma unidad, T no es acotado y, por consiguiente, no es continuo, donde hemos usado la Proposición 2.9.

3. Sea $T : C^0([0, 1]) \longrightarrow C^0([0, 1])$ el operador definido por $T(f)(t) = \int_0^t f(x) dx$ (**operador integral**), donde el espacio está dotado de la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Observación. El símbolo $C^0[0, 1]$ representa el conjunto de todas las funciones reales (o complejas) que son continuas en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

$$C^0[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [0, 1]\}$$

Este operador es lineal y continuo. Para verificar la acotación:

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t f(x) dx \right| \leq \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t |f(x)| dx \stackrel{(*)}{\leq} \int_0^1 |f(x)| dx \leq \|f\|_\infty$$

donde en $(*)$ hemos usado que $|f(x)| \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$, y por tanto es no negativo. Dado que $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, el operador es acotado con norma $\|T\| \leq 1$ y, por tanto, continuo.

Más en general, sea $T : C^0([a, b]) \longrightarrow C^0([a, b])$ definido mediante un núcleo $K(x, t)$ continuo en $[a, b] \times [a, b]$:

$$T(f)(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

Usando la desigualdad de Minkowski (o propiedades básicas de la integral):

$$\begin{aligned} |T(f)(x)| &\leq \int_a^b |K(x, t)| \cdot |f(t)| dt \stackrel{(*)}{\leq} \int_a^b |K(x, t)| \cdot \|f\|_\infty dt \stackrel{(**)}{\leq} \|f\|_\infty \int_a^b \|K\|_\infty dt = \\ &= \|f\|_\infty \cdot \|K\|_\infty \int_a^b dt = |b - a| \cdot \|K\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos acotado a $|f(t)|$ por $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$, es decir, su máximo valor absoluto en el intervalo $[a, b]$, y en $(**)$ hemos hecho lo mismo para $|K(x, t)|$.

Definiendo $M = |b - a| \cdot \|K\|_\infty$, se tiene $\|Tf\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$, lo que demuestra que T es continuo.

4. Sea $F_k : l_p \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional que asigna a cada sucesión su k -ésima componente, es decir, $F_k(x) := x_k$. Este operador es continuo, ya que:

$$\|F_k(x)\| = |x_k| = (|x_k|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} |x_l|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p$$

Esto muestra que $\|F_k\| \leq 1$, por lo que el operador está acotado y es, por tanto, continuo.

Definición 2.16. Sean X, Y espacios normados. Definimos el **conjunto de los operadores lineales acotados** como:

$$BL(X, Y) := \{T : X \longrightarrow Y \mid T \text{ es lineal y acotado}\}$$

Proposición 2.10. $BL(X, Y)$ es un espacio vectorial normado con la norma operacional definida por:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|, \quad \forall T \in BL(X, Y)$$

Demostración. Observamos primero que si T es acotado, existe $M > 0$ tal que:

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \implies \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M \quad \forall x \neq 0 \implies \|T\| \leq M < +\infty$$

Para demostrar que $\|T\|$ es una norma, verificamos la desigualdad triangular, pues los otros dos axiomas, $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$ y $\|T\| = 0 \iff T = 0$, se cumplen de forma trivial, veámoslo:

- $\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda(Tx)\| = \sup_{\|x\|=1} (|\lambda|\|Tx\|) = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda|\|T\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T \in BL(X, Y)$.
- $\|T\| = 0 \iff \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = 0 \iff T(x) = 0$ para todo x con $\|x\| = 1 \iff T = 0$.

Visto los axiomas sencillo, veámos finalmente la desigualdad triangular. Sean $T_1, T_2 \in BL(X, Y)$. Para cualquier $x \in X$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|(T_1 + T_2)(x)\| &= \|T_1x + T_2x\| \\ &\leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \\ &\leq \|T_1\| \cdot \|x\| + \|T_2\| \cdot \|x\| \\ &= (\|T_1\| + \|T_2\|) \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Tomando $\|x\| = 1$, obtenemos:

$$\|(T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|, \quad \forall x \in X$$

donde sabiendo que $\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)(x)\|$, y tomando que la desigualdad anterior se cumple para todo $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$, entonces se tiene que $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$, lo que demuestra la desigualdad triangular. $\square$

Observación. Realmente la norma $\|T\|$ es la constante más pequeña M tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

Notación. Importante notar, que a veces en lugar de poner $\|T(x)\|$ se suele escribir $\|Tx\|$, es decir, se omite el paréntesis, y se escribe Tx en lugar de $T(x)$, aunque ambos significados son equivalentes.

Observación. Para ver más claramente la última igualdad de la Proposición 2.10, es decir, la siguiente

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

basta observar el siguiente hecho, tomando $u = \frac{x}{\|x\|}$, entonces

$$\|u\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1$$

Aplicando esto, tenemos que

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|T(x)\| \stackrel{(*)}{=} \left\| T \left(\frac{1}{\|x\|} \cdot x \right) \right\|$$

donde en (*) hemos usado la propiedad de escalares de la norma (aunque no hemos probado que esta sea una norma ya, si hemos probado dicha propiedad justo antes).

Definición 2.17. Como $BL(X, Y)$ es normado, entonces tenemos la noción de convergencia. $(T_n) \in BL(X, Y)$ **converge (o converge uniformemente)** a $T \in BL(X, Y)$ si:

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0 \iff \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|(T_n - T)(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$$

Observación. Si $T_n \rightarrow T$ entonces $T_n(x) \rightarrow T(x) \forall x \in X$, de hecho:

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \|(T_n - T)(x)\| \leq \|T_n - T\| \cdot \|x\| \rightarrow 0$$

Definición 2.18. Llamamos $BL(X, \mathbb{R}) =: X^*$ al **espacio dual continuo** de X .

Teorema 2.11. Sea Y un espacio de Banach, y X un espacio normado. Entonces $BL(X, Y)$ es de Banach.

Demostración. Sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $BL(X, Y)$, es decir: $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon \forall n, m > N$. Entonces:

$$\forall x \in X \quad \|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\| \quad \forall n, m > N$$

Como $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y , que es completo, entonces $\exists T(x)$ tal que:

$$T_n(x) \rightarrow T(x) \text{ cuando } n \rightarrow +\infty$$

Sea T la aplicación $x \mapsto T(x)$, entonces:

(i) T es lineal:

$$T(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n(x) + T_n(y)) = T(x) + T(y)$$

(ii) T es acotado:

Dado que $\{T_n(x)\}$ es de Cauchy en Y , entonces $\{\|T_n(x)\|\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de números reales que es de Cauchy (esto ocurre porque la norma es una función continua y mantiene la sucesión de Cauchy), y por lo tanto es acotada, es decir, $\exists M > 0 : \|T_n(x)\| \leq M$. Entonces:

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq M \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$$

Pasando al límite:

$$\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\| \Rightarrow T \in BL(X, Y)$$

(iii) $T_n \rightarrow T$ en $BL(X, Y)$:

Ya sabemos que $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x\| \quad \forall n, m > N$. Hacemos $n \rightarrow +\infty$:

$$\|T(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x\| \iff \frac{\|T(x) - T_m(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon \quad \text{con } \|x\| \neq 0$$

donde hemos supuesto $\|x\| \neq 0$ porque si $\|x\| = 0$ entonces se cumpliría la desigualdad trivialmente. Se tiene finalmente que $T_m \rightarrow T$.

□

Corolario 2.11.1. X^ es de Banach para todo espacio normado X , sea o no de Banach.*

Estudiaremos ahora el caso $Y = X$, donde primero definiremos $BL(X) := BL(X, X)$, y luego veremos que $BL(X)$ es cerrado para la composición.

Sean $T_1, T_2 \in BL(X)$, tales que $X \xrightarrow{T_1} X \xrightarrow{T_2} X$. Entonces:

$$T_2 \circ T_1 : X \longrightarrow X, \quad (T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x)) \quad \forall x \in X$$

Veámos ahora si está acotada esta composición

$$\frac{\|(T_2 \circ T_1)(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|T_2(T_1x)\|}{\|T_1x\|} \cdot \frac{\|T_1x\|}{\|x\|} \leq \|T_2\| \cdot \|T_1\|$$

donde hemos supuesto $\|x\| \neq 0$ y $\|T_1x\| \neq 0$, y se ha obtenido que $\|T_2 \circ T_1\| \leq \|T_2\| \cdot \|T_1\| < +\infty$, lo que demuestra que $T_2 \circ T_1$ es acotado, y por tanto, $T_2 \circ T_1 \in BL(X)$.

Comprobaremos ahora que la composición también es **continua**, es decir, el límite de la composición es la composición de los límites.

Sean $(T_{1,n}), (T_{2,n}) \in BL(X)$ tales que $T_{1,n} \rightarrow T_1$ y $T_{2,n} \rightarrow T_2$, entonces:

$$\begin{aligned} \|T_{2,n} \circ T_{1,n} - T_2 \circ T_1\| &= \|T_{2,n} \circ T_{1,n} - T_{2,n} \circ T_1 + T_{2,n} \circ T_1 - T_2 \circ T_1\| \\ &\leq \|T_{2,n}(T_{1,n} - T_1)\| + \|(T_{2,n} - T_2) \circ T_1\| \\ &\leq \|T_{2,n}\| \cdot \|T_{1,n} - T_1\| + \|T_{2,n} - T_2\| \cdot \|T_1\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

por lo que $T_{2,n} \circ T_{1,n} \rightarrow T_2 \circ T_1$. Esto demuestra que la composición es continua, lo que implica que $(BL(X), \circ)$ es un **Álgebra de Banach** con elemento neutro id_X .

Definición 2.19. Para que un conjunto $\mathcal{A}$ sea un **Álgebra de Banach**, debe cumplir cuatro condiciones fundamentales:

1. Es un espacio vectorial
2. Existe una operación de “multiplicación” entre sus elementos, que es
 - **Asociativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}.$
 - **Distributiva:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}.$
3. Es un espacio de Banach.
4. Para cualquier par de elementos $a, b \in \mathcal{A}$, se debe cumplir:

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

Ejercicio 2.3.1. Sea $F_k(x) = x_k$ con $x \in \ell_p$. Mostrar que $\{F_k x\}$ converge puntualmente a 0, pero $\|F_k\| \not\rightarrow 0$.

Como $x \in \ell_p$, sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k|^p = 0$, y tomando $f(y) = y^p$ función continua en $y \geq 0$, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} (|x_k|^p)^{1/p} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k|^p \right)^{1/p} = 0^{1/p} = 0$$

y por tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$$

Tenemos ahora la convergencia puntual de la sucesión $\{F_k x\}$ a 0

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \quad (\text{Convergencia puntual})$$

Por otro lado, observamos que:

$$|F_k(x)| = |x_k| = (|x_k|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p \implies |F_k(x)| \leq 1 \cdot \|x\|_p \quad \forall x \in \ell_p$$

de lo que tenemos $\|F_k\| \leq 1$. Si tomamos la sucesión $x = e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ (donde el 1 está en la posición k):

$$\|e_k\|_{\ell_p} = 1 \quad \text{y} \quad F_k(e_k) = 1 \implies \|F_k\| \geq \frac{|F_k(e_k)|}{\|e_k\|} = 1$$

De lo anterior concluimos que $\|F_k\| = 1$ para todo k , por lo que la sucesión de operadores **no** converge a 0 en norma, aunque sí lo haga puntualmente.

Ejercicio 2.3.2. Sea $F : C^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $F(u) = u(c)$ para un $c \in [a, b]$ fijo. Calcular $\|F\|$.

Sea $u \in C^0([a, b])$. Como $[a, b]$ es compacto, u alcanza su máximo, por lo que:

$$|F(u)| = |u(c)| \leq \max_{t \in [a, b]} |u(t)| = \|u\|_{\infty} \implies \|F\| \leq 1$$

Si tomamos la función constante $u(t) = 1$, tenemos $\|u\|_\infty = 1$ y $|F(1)| = 1$. Por lo tanto, $\|F\| = 1$, donde hemos usado que

$$\|F\| = \sup_{\|u\|_\infty=1} |F(u)| \leq 1$$

y por tanto si encontramos una función $u \in C^0([a, b])$ que cumpla $F(u) = 1$, tenemos el supremo buscado, es decir, $\|F\| = 1$.

Ejercicio 2.3.3. (i) Sea $F : C^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(u) = \int_a^b u(t) dt$. Calcular $\|F\|$.

Calculemos la norma

$$|F(u)| = \left| \int_a^b u(t) dt \right| \leq \int_a^b |u(t)| dt \leq \|u\|_\infty \int_a^b 1 dt = |b-a| \cdot \|u\|_\infty$$

Esto implica $\|F\| \leq |b-a|$. Si $u(t) = 1$, entonces $F(1) = b-a$, luego $\|F\| = |b-a|$.

(ii) Sea $T : C^0([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$ tal que $T(u)(t) = \int_a^t u(x) dx$. Calcular $\|T\|$.

Calculemos la norma del operador:

$$\|T(u)\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \left| \int_a^t u(x) dx \right| \leq \int_a^b |u(x)| dx \leq |b-a| \cdot \|u\|_\infty \implies \|T\| \leq |b-a|$$

Si $u(t) = 1$, entonces $T(1)(t) = t-a$. El máximo se alcanza en $t = b$:

$$\|T(1)\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |t-a| = |b-a| \implies \|T\| = |b-a|$$

Ejercicio 2.3.4. Sea $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ el operador de desplazamiento a la izquierda (Shift) definido por $T_k(x) = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots)$. Demostrar que T_k es un operador lineal acotado y calcular su norma.

Demostremos que es acotado

$$\|T_k(x)\|_2^2 = \left(\sqrt{\sum_{j=k+1}^{\infty} |x_j|^2} \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \|x\|_2^2 \implies \|T_k(x)\|_2 \leq \|x\|_2$$

Esto muestra que $\|T_k\| \leq 1$. Para ver que la norma es exactamente 1, tomamos el vector de la base canónica $e_{k+1} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (donde el 1 está en la posición $k+1$):

$$\|e_{k+1}\|_2 = 1 \quad \text{y} \quad T_k(e_{k+1}) = (1, 0, 0, \dots) \implies \|T_k(e_{k+1})\|_2 = 1$$

Por lo tanto, $\|T_k\| = 1$.

2.3.1. Distancias equivalentes

Definición 2.20. Sea X un espacio vectorial. Dos espacios normados $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ se dicen **equivalentes** si son equivalentes como espacios métricos (**equivalencia métrica**), es decir, si y solo si cada conjunto abierto en $(X, \|\cdot\|_1)$ contiene un conjunto abierto de $(X, \|\cdot\|_2)$ y viceversa (**equivalencia topológica**).

Observación. En términos generales, el hecho de que dos espacios sean equivalentes no garantiza que preserven el carácter de las sucesiones de Cauchy (una sucesión de Cauchy en un espacio podría no serlo en el otro).

Ejemplo. Consideremos $(\mathbb{R}, d_1)$ con la métrica usual $d_1(x, y) = |x - y|$ y $(\mathbb{R}, d')$ con la métrica $d'(x, y) = \arctan(|x - y|)$. Aunque ambos espacios son topológicamente equivalentes, observamos que:

- La sucesión $x_n = n$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}, d')$ ya que $\|x_n\|_{d'} = \arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$, lo que implica su convergencia en la completación del espacio.
- Sin embargo, dicha sucesión no converge (ni es de Cauchy) en $(\mathbb{R}, d_1)$.

Definición 2.21. Sean (X, d_1) y (X, d_2) dos espacios métricos. Se dice que las métricas d_1 y d_2 son **uniformemente equivalentes** (o simplemente **equivalentes**) si

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tales que } \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Notación. Es importante destacar que cuando hablemos de “uniformemente equivalentes” nos referiremos a la **equivalencia métrica** (definición anterior), mientras que si hablamos de “equivalentes” nos referiremos a la **equivalencia topológica**.

Proposición 2.12. Si (X, d_1) y (X, d_2) son uniformemente equivalentes, entonces:

$$(x_n) \text{ es de Cauchy en } d_1 \iff (x_n) \text{ es de Cauchy en } d_2$$

Demostración. Supongamos que (x_n) es una sucesión de Cauchy en (X, d_1) . Por definición, para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $d_1(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ para todo $n, m > N$. Utilizando la equivalencia uniforme:

$$d_2(x_n, x_m) \leq \beta d_1(x_n, x_m) \leq \beta \varepsilon$$

Dado que $\beta \varepsilon$ puede hacerse arbitrariamente pequeño, se deduce que (x_n) es de Cauchy en d_2 . El recíproco se demuestra de forma análoga utilizando la constante α . $\square$

En general, si dos distancias son equivalentes, no tienen porque ser uniformemente equivalentes, cuando hablamos de espacios métricos, mientras que en espacios normados si es lo mismo, lo veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.13. Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre un espacio vectorial X son equivalentes si y solo si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que:

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Demostración. $\Leftarrow$) Si existen tales constantes, las métricas inducidas $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ y $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ son uniformemente equivalentes. Esto garantiza que ambas normas definen la misma topología (mismos conjuntos abiertos) y, por tanto, son equivalentes.

$\implies$) Supongamos que las normas son equivalentes. Esto implica que la aplicación identidad:

$$Id : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$$

es continua. Esta conclusión viene de una noción topológica, donde se tiene que una aplicación es continua, si tomando un abierto en $(X, \|\cdot\|_2)$, su imagen inversa es un abierto en $(X, \|\cdot\|_1)$. Dado que las normas son equivalentes, un conjunto abierto V en el espacio de llegada, en el espacio inicial es $Id^{-1}(V) = V$, que es un conjunto abierto para la norma $\|\cdot\|_1$, pues dijimos que las normas eran equivalentes.

Dado que el operador identidad es claramente lineal, la continuidad implica que es un operador acotado. Por lo tanto, existe una constante $\beta > 0$ tal que:

$$\|Id(x)\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \implies \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Por simetría, la aplicación inversa $Id^{-1} : (X, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1)$ también es lineal y continua, lo que implica que es acotada. Así, existe una constante $\gamma > 0$ tal que:

$$\|Id^{-1}(x)\|_1 \leq \gamma \|x\|_2 \implies \|x\|_1 \leq \gamma \|x\|_2 \quad \forall x \in X$$

De esta última desigualdad obtenemos $\frac{1}{\gamma} \|x\|_1 \leq \|x\|_2$. Definiendo $\alpha = \frac{1}{\gamma}$, se llega a la relación:

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

□

Observación. La equivalencia entre espacios normados puede ser vista como equivalencia métrica o topológica, en ambos casos es equivalente como hemos comprobado en la anterior proposición. En cambio en espacios métricos, la equivalencia topológica es la que habla de abiertos y la métrica es la que habla de desigualdades entre las métricas.

2.3.2. Convergencia de series de operadores

Sea X un espacio de Banach y sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in BL(X)$ una sucesión. Definimos

$$S_n := \sum_{k=1}^n T_k$$

Definición 2.22. Se dice que la sucesión $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente si existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =: T$$

es decir, si $\|S_n - T\|_{BL(X)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Definición 2.23. Una serie de operadores $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice **absolutamente convergente** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|$$

es convergente como sucesión de números reales.

Observación. Si (S_n) converge absolutamente, entonces converge.

Demostración.

$$\left\| \sum_{k=1}^n T_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|T_k\| \quad \text{de lo cual} \quad \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} T_k \right\| < +\infty \implies S_n \text{ es convergente}$$

□

Ejercicio 2.3.5. Sea $T \in BL(X)$ con $\|T\| < 1$. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} T^k = (Id - T)^{-1}$$

Primero demostraremos que converge absolutamente, donde sabemos que $(BL(X), \|\cdot\|)$ es un Algebra de Banach, entonces tenemos que la norma de operadores tiene la propiedad de submultiplicatividad, es decir, $\|T^k\| \leq \|T\|^k$, entonces

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|T\|^k$$

y como $\|T\| < 1$, entonces $\sum_{k=0}^{+\infty} \|T\|^k$ es una serie geométrica convergente, lo que

implica que $\sum_{k=0}^{+\infty} \|T^k\|$ es convergente, lo que implica que $\sum_{k=0}^{+\infty} T^k$ es convergente.

Demostrado que la sucesión es convergente (existe el límite), calcularemos cual es el límite, veámoslo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} T^k &= Id + \sum_{k=1}^{+\infty} T^k = Id + T \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} T^{k-1} = Id + T \sum_{k=0}^{+\infty} T^k \\ \implies (Id - T) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} T^k &= Id \implies \sum_{k=0}^{+\infty} T^k = (Id - T)^{-1} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.6. Sea $T : X \rightarrow Y$ lineal. Demostrar que

T es continua $\iff T$ manda sucesiones de Cauchy a sucesiones de Cauchy

$\implies$) Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Entonces $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow +\infty} 0$. De lo cual

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow +\infty} 0$$

donde hemos usado que como T es un operador lineal continuo, entonces acotado y por tanto $\|T\| < +\infty$. Queda demostrado que $(T(x_n))_n$ es de Cauchy.

$\Leftarrow$) Supongamos por reducción al absurdo que T no es continua, entonces T no es acotada (lo cual es equivalente a no ser continua por sucesiones), es decir,

para cualquier constante $M > 0$, existe algún vector $v \in X$ tal que $\|T(v)\| > M\|v\|$

Sabiendo esto, obtendremos la sucesión (z_n) tal que

$$\|T(z_n)\| > n^2 2^n \|z_n\|$$

y definiremos la sucesión (x_n) de la siguiente manera

$$x_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{z_n}{\|z_n\|}$$

Veámos que dos desigualdades obtenemos de la definición de x_n , tanto para la norma de los elementos de la sucesión, como para la norma de su imagen por T

$$\begin{aligned} \blacksquare \|x_n\| &= \left\| \frac{1}{n^2} \frac{z_n}{\|z_n\|} \right\| = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\|z_n\|}{\|z_n\|} = \frac{1}{n^2} \\ \blacksquare \|T(x_n)\| &= \left\| T\left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{z_n}{\|z_n\|}\right) \right\| = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\|T(z_n)\|}{\|z_n\|} > \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2 2^n \|z_n\|}{\|z_n\|} = 2^n \end{aligned}$$

Entonces, sea $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ tal que

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$$

es de Cauchy. Por otro lado,

$$\|T(S_n)\| = \left\| \sum_{k=1}^n T(x_k) \right\| > \sum_{k=1}^n 2^k \rightarrow +\infty$$

lo que implica que $(T(S_n))_n$ no es de Cauchy, ya que si la sucesión no está acotada, entonces no es de Cauchy. Esto es una contradicción, por lo tanto, T es continua.

2.4. Espacios normados de dimensión finita

Definición 2.24. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es de **dimensión finita** si el espacio vectorial subyacente X es finito, es decir, posee una base formada por un número finito de elementos.

Proposición 2.14. (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*) Sean $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$ números reales cualesquiera. Entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si existe un número real x tal que

$$a_k x + b_k = 0 \quad \text{para cada } k = 1, \dots, n.$$

Proposición 2.15. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado con $\dim X = N < +\infty$ y base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$. Entonces la aplicación:

$$T : X \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad x = \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo lineal topológico.

Demostración. T es un isomorfismo lineal por ser X un espacio vectorial de dimensión finita, esto se ve fácilmente demostrando las propiedades siguientes:

- **Linealidad:** $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$. Esto es directo por la definición de coordenadas.
- **Bijectividad:** Es inyectiva porque en una base la representación es única (si las coordenadas son cero, el vector es cero). Es sobreyectiva porque para cualquier columna de números en $\mathbb{R}^N$, puedes construir un vector en X sumando la base.

Para demostrar que T es un isomorfismo topológico, tenemos que demostrar que T y su inversa T^{-1} son continuas, para ello usaremos la Proposición 2.9, ya que sabemos que T y T^{-1} son operadores lineales (se puede demostrar trivialmente sabiendo que trabajamos con una base).

- **Continuidad de T^{-1} :** Consideramos la aplicación inversa dada como

$$T^{-1} : \mathbb{R}^N \longrightarrow X, \quad T^{-1}(y) = \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i \quad \forall y = (a_1, \dots, a_N)^T \in \mathbb{R}^N$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|T^{-1}(y)\| = \left\| \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i \right\| \leq \sum_{i=1}^N |a_i| \|\alpha_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N \|\alpha_i\|^2 \right)^{1/2} = \|y\| M$$

Si definimos $M = \left(\sum_{i=1}^N \|\alpha_i\|^2 \right)^{1/2}$ como una constante (los vectores de la base no cambian), tenemos $\|T^{-1}(y)\| \leq M \|y\|_2$. Al ser un operador acotado, T^{-1} es continuo.

- **Continuidad de T :** Supongamos por reducción al absurdo que T no es continua en el origen. Entonces buscamos una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \rightarrow 0$ pero $\|T(x_n)\| \not\rightarrow 0$, y que cumpla que

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \|T(x_n)\| > \varepsilon \text{ para todo } n$$

Para ello sabemos que T no es continua en el origen, es decir, existe un $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ que yo elija, siempre hay al menos un vector x que cumple $\|x\| < \delta$ y $\|T(x)\| > \bar{\varepsilon}$, y como es cierto para cualquier δ , construiremos la sucesión de la que hablabamos antes de la siguiente manera

- Para $\delta = 1$, existe x_1 tal que $\|x_1\| < 1$ y $\|T(x_1)\| > \bar{\varepsilon}$.
- Para $\delta = \frac{1}{2}$, existe x_2 tal que $\|x_2\| < \frac{1}{2}$ y $\|T(x_2)\| > \bar{\varepsilon}$.
- Y así sucesivamente para cualquier n .

Finalmente tenemos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightarrow 0$, pues $\|x_n\| \leq \frac{1}{n}$ pero $\|T(x_n)\| > \bar{\varepsilon}$ para todo n .

Definimos $z_n = \frac{x_n}{\|T(x_n)\|}$, que lo podemos hacer porque sabemos que el denominador nunca es 0 (por lo demostrado antes). Se observa que $\|T(z_n)\| = 1$ para todo n , y que $z_n \rightarrow 0$ porque

$$\|z_n\| = \frac{\|x_n\|}{\|T(x_n)\|} < \frac{1/n}{\bar{\varepsilon}} \rightarrow 0$$

La sucesión $\{T(z_n)\}$ está contenida en la esfera unidad $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$ de $\mathbb{R}^N$, que es un conjunto compacto. Por tanto, existe una subsucesión $\{T(z_{n_k})\}$ que converge a un elemento $y \in \mathbb{R}^N$ con $\|y\| = 1$, esto es cierto gracias la continuidad de T , es decir

$$\|y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T(z_{n_k})\| = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1$$

y donde hemos usado que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente (Teorema de Bolzano-Weierstrass).

Debido a la continuidad de T^{-1} demostrada anteriormente:

$$T^{-1}(T(z_{n_k})) \rightarrow T^{-1}(y) \implies z_{n_k} \rightarrow T^{-1}(y)$$

Sin embargo, como $z_n \rightarrow 0$, su subsucesión también debe converger a 0. Esto implica que $T^{-1}(y) = 0$, y por la inyectividad de T^{-1} , $y = 0$. Esto contradice el hecho de que $\|y\| = 1$, concluyendo que T es continuo.

□

Corolario 2.15.1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión finita, entonces todas las normas sobre X son equivalentes.

Demostración. Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ dos espacios normados con la misma estructura vectorial pero con normas diferentes, entonces

$$(X, \|\cdot\|_1) \xrightarrow{T} \mathbb{R}^N \xrightarrow{T^{-1}} (X, \|\cdot\|_2)$$

con T y T^{-1} isomorfismos lineales topológicos. Por lo tanto, tenemos

$$Id : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2), \quad Id = T^{-1} \circ T$$

donde Id es continua por composición de continuas, y entonces Id está acotada, es decir, $\|x\|_2 \leq M\|x\|_1, \forall x \in X$. Análogamente

$$Id : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1), \quad Id = T \circ T^{-1}$$

es continua, y entonces $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \forall x \in X$. Por lo tanto, las normas son equivalentes. $\square$

Corolario 2.15.2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión finita y $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio normado cualquiera, entonces toda aplicación lineal

$$L : X \longrightarrow Y$$

es continua.

Demostración. Como X es de dimensión finita, entonces $L(X) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un subespacio de dimensión finita en Y , de hecho podemos definir una base en dicho subespacio como $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, con $m \leq n$. Existe una matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$L(x) = M[x]$$

donde $[x]$ es el vector columna de las coordenadas de x en la base de X . Tenemos entonces

$$\|L(x)\| = \|M[x]\| \leq \|M\| \cdot \|[x]\| = C \cdot \|x\|$$

de donde obtenemos que L está acotada, es decir, es continua. $\square$

Corolario 2.15.3. Si X es de dimensión finita, entonces

$$K \subseteq X \text{ es compacto} \iff K \text{ es cerrado y acotado}$$

Demostración. $\implies$) Es cierto en cualquier espacio métrico.

$\impliedby$) Sea $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal topológico y $K \subseteq X$ cerrado y acotado. Entonces $T(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto por ser T continua, por lo que es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$. Dado que T^{-1} es continua, $K = T^{-1}(T(K))$ es compacto en X . $\square$

Ejercicio 2.4.1. Si X es un espacio normado de dimensión finita, entonces X es completo.

Sea $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal topológico. Si $(x_m) \subseteq X$ es una sucesión de Cauchy tenemos que $\|x_n - x_m\|_X \rightarrow 0$, entonces como T es continua, y por tanto acotada, se tiene que

$$\|T(x_n) - T(x_m)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|_X$$

como el lado derecho se va a cero, el lado izquierdo también, y entonces $(T(x_m)) \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, que es completo. Por lo tanto, $T(x_m) \rightarrow y \in \mathbb{R}^n$. Dado que T^{-1} es continua, $x_m = T^{-1}(T(x_m)) \rightarrow T^{-1}(y) \in X$. Esto muestra que toda sucesión de Cauchy en X converge, por lo que X es completo.

Ejercicio 2.4.2. Si Y es un subespacio de dimensión finita en un espacio normado X , entonces Y es cerrado.

Sea $T : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal topológico. Dado que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado completo, es cerrado en sí mismo. Por lo tanto, $Y = T^{-1}(\mathbb{R}^n)$ es cerrado en X por ser T^{-1} continua.

Lema 2.16. (de Riesz). Sea X un espacio normado cualquiera y $Y \subsetneq X$ un subespacio propio, entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u_\varepsilon \in X : \|u_\varepsilon\| = 1 \quad y \quad d(u_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$$

donde $d(u, Y) := \inf_{y \in Y} d(u, y)$.

Demostración. Es importante destacar que estudiaremos solo el caso $0 < \varepsilon < 1$, porque para $\varepsilon > 1$, la desigualdad $d(u_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$ se cumple trivialmente para cualquier u_ε con $\|u_\varepsilon\| = 1$.

Como $Y \subsetneq X$, entonces $\exists v \in X \setminus Y$ y por lo tanto $d(v, Y) = \delta > 0$. Sea $y_\varepsilon \in Y$ tal que

$$\|v - y_\varepsilon\| \leq \frac{\delta}{1 - \varepsilon} > \delta$$

Sea $u_\varepsilon = \frac{v - y_\varepsilon}{\|v - y_\varepsilon\|}$, entonces $\|u_\varepsilon\| = 1$ y es tal que para cualquier $z \in Y$:

$$d(u_\varepsilon, z) = \|u_\varepsilon - z\| = \left\| \frac{v - y_\varepsilon}{\|v - y_\varepsilon\|} - z \right\| = \left\| \frac{v - y_\varepsilon - \|v - y_\varepsilon\| \cdot z}{\|v - y_\varepsilon\|} \right\| \stackrel{(*)}{\geq} \frac{\delta}{\delta/(1 - \varepsilon)} = 1 - \varepsilon$$

donde en $(*)$ hemos aplicado para el denominador la desigualda anterior y para el numerador, como sabemos que y_ε y z estan en Y y es un subespacio, entonces es cerrado para la suma y producto de escalares, y tenemos

$$\|v - y_\varepsilon - \|v - y_\varepsilon\| \cdot z\| = \|v - (y_\varepsilon + \|v - y_\varepsilon\| \cdot z)\| = \|v - y^*\| \geq d(v, Y) = \delta \quad \text{donde } y^* \in Y$$

lo que implica que $d(u_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$. $\square$

Teorema 2.17. Sea $X = (X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, entonces:

$$X \text{ es de dimensión finita} \iff \text{la bola unidad es compacta}$$

Demostración. $\implies$) Ya está demostrado en Corolario 2.15.3.

$\impliedby$) Sa $\bar{B} = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ compacta. Demostremos que X es de dimensión finita.

Sea $x_1 \in \bar{B}$ y sea $Y_1 = \langle x_1 \rangle$ el subespacio generado por x_1 . Si $Y_1 = X$ hemos terminado. De lo contrario, Y_1 es cerrado y por Riesz, tenemos que

$$\exists x_2 \in \bar{B} \text{ tal que } d(x_2, Y_1) > \frac{1}{2}$$

Definimos ahora $Y := \langle x_1, x_2 \rangle$ el subespacio generado por x_1 y x_2 . Si $Y = X$ hemos terminado, de lo contrario

$$\exists x_3 \in \bar{B} : d(x_3, Y) > \frac{1}{2}$$

y definimos $Y_3 := \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ e iteramos. Supongamos por reducción al absurdo que el proceso no termina, entonces

$$\exists (x_n) \in \bar{B} \text{ tal que } d(x_n, x_i) > \frac{1}{2} \text{ para todo } n \in \{0, \dots, n-1\}$$

donde sabiendo que X es espacio normado de dimensión finita, es completo y por tanto al no ser la sucesión (x_n) de cauchy, no es convergente. De hecho, lo anterior afirma que (x_n) no admite subsucesión convergente en $\bar{B}$, lo que contradice la compacidad de $\bar{B}$, y por reducción al absurdo se tiene. $\square$

Ejemplo. Demostremos que l_2 es de dimensión infinita.

Sea $e_n = (0, 0, \dots, \overset{n}{1}, \dots, 0)$ la sucesión que tiene un 1 en la posición n y 0 en las demás posiciones. Es fácil verificar que cada e_n pertenece a $\bar{B} = \{x \in l_2 : \|x\|_2 = 1\}$, ya que $\|e_n\|_2 = 1$. Además, para cualquier $n \neq m$, se tiene:

$$\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

Esto implica que la sucesión (e_n) no es de Cauchy, ya que la distancia entre cualquier par de términos es constante e igual a $\sqrt{2}$. Por lo tanto, (e_n) no converge en l_2 , entonces $\bar{B}$ no es compacto, y por el Teorema 2.17 tenemos que l_2 es de dimensión infinita.

3. Teorema de Hahn-Banach

Definición 3.1. Sea X un espacio vectorial real, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **sub-lineal** (o sub-aditiva) si se cumple:

- i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$
- ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X$

Ejemplo. Las normas son sub-lineales.

Definición 3.2. Un conjunto X está **totalmente ordenado** si existe una relación binaria $\leq$ que cumple tres propiedades para todos los elementos $a, b, c \in X$:

- i) **Reflexiva:** $a \leq a$
- ii) **Antisimétrica:** Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$
- iii) **Transitiva:** Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$

Se le dice **parcialmente ordenado** si la relación $\leq$ no compara todos los elementos de X , es decir, pueden existir elementos $x, y \in X$ tales que ni $x \leq y$ ni $y \leq x$.

Definición 3.3. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto $Y \subseteq X$ se dice **inductivo** si cada uno de sus subconjuntos totalmente ordenados admite una cota superior, es decir

$$\text{si } Z \subseteq Y \text{ es totalmente ordenado} \implies \exists \alpha \in Y : z \leq \alpha \quad \forall z \in Z$$

Definición 3.4. Sea $(X, \leq)$ parcialmente ordenado. Un elemento $m \in X$ se dice **maximal** si

$$\forall x \in X \text{ tal que } m \leq x, \text{ entonces } m = x$$

es decir, no existe ningún elemento en X que sea mayor que m .

Ejemplo. El conjunto $X = \{[a, b] \subseteq (0, 1) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b\}$ está parcialmente ordenado por la relación de inclusión, veámoslo:

- i) **Reflexiva:** Para todo $[a, b] \in X$, se cumple que $[a, b] \subseteq [a, b]$, por lo tanto $[a, b] \leq [a, b]$.
- ii) **Antisimétrica:** Si $[a, b] \leq [c, d]$ y $[c, d] \leq [a, b]$, entonces $[a, b] \subseteq [c, d]$ y $[c, d] \subseteq [a, b]$, lo que implica que $[a, b] = [c, d]$.

- iii) **Transitiva:** Si $[a, b] \leq [c, d]$ y $[c, d] \leq [e, f]$, entonces $[a, b] \subseteq [c, d]$ y $[c, d] \subseteq [e, f]$, lo que implica que $[a, b] \subseteq [e, f]$, es decir, $[a, b] \leq [e, f]$.

En cambio, no es inductivo, ya que el subconjunto $\{[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \subseteq X$ está ordenado pero no tiene cota superior.

Lema 3.1. (de Zorn) Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado e inductivo admite un elemento maximal.

Los teoremas de Hahn-Banach se ocupan de estudiar las extensiones de aplicaciones lineales definidas en un subespacio Y de un espacio X .

Teorema 3.2. (de Hahn-Banach) Sea X un espacio vectorial real y sea $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sub-lineal. Sea Y un subespacio vectorial de X y consideramos $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $f(y) \leq p(y)$ para todo $y \in Y$. Entonces: existe $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que:

$$i) F(y) = f(y) \quad \forall y \in Y$$

$$ii) F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

Demostración. La demostración se basa en el Lema de Zorn, veámosla. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de pares (Y_α, f_α) donde:

- i) $Y_\alpha \subseteq X$ y $Y \subseteq Y_\alpha$ es un subespacio de Y_α .
- ii) $f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ es una extensión lineal de f en Y_α .
- iii) $f_\alpha \leq p$ sobre Y_α .

Sabemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, de hecho $(Y, f) \in \mathcal{F}$. Definimos una relación de orden en $\mathcal{F}$:

$$(Y_\alpha, f_\alpha) \leq (Y_\beta, f_\beta) \iff Y_\alpha \subseteq Y_\beta, \text{ y } f_\beta \text{ es extensión lineal de } f_\alpha$$

$(\mathcal{F}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Demostremos que $(\mathcal{F}, \leq)$ es inductivo, veámoslo.

Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una familia totalmente ordenada, veamos que admite una cota superior. Definimos

$$M = \bigcup_{Y_\alpha \in \mathcal{G}} Y_\alpha, \quad \tilde{f}(y) := f_\alpha(y) \quad \forall Y_\alpha \in \mathcal{G}$$

entonces, vamos a demostrar que efectivamente $(M, \tilde{f})$ es una cota superior de $\mathcal{G}$, veámoslo:

- i) $Y_\alpha \subseteq M \quad \forall Y_\alpha \in \mathcal{G}$
- ii) $\tilde{f}$ está bien definida porque si $y \in Y_\alpha \cap Y_\beta$, entonces uno está contenido en el otro y, por lo tanto, uno es extensión del otro.
- iii) $\tilde{f}$ es lineal: $\tilde{f}(y_1 + y_2) = f_\alpha(y_1 + y_2) = f_\alpha(y_1) + f_\alpha(y_2) = \tilde{f}(y_1) + \tilde{f}(y_2)$
- iv) $\tilde{f}(y) = f_\alpha(y) \leq p(y) \quad \forall y \in Y$

Se sigue que $(M, \tilde{f})$ es una cota superior $\implies \mathcal{F}$ es inductivo. Por el lema de Zorn existe $(Z, F) \in \mathcal{F}$ elemento maximal, por lo tanto F es extensión lineal de f con $F \leq p$ en Z . Si verificamos que $Z = X$, hemos terminado.

Supongamos por reducción al absurdo, que $Z \subsetneq X$, entonces existe $x_0 \in X \setminus Z$, y consideramos el subespacio

$$W = \{z + tx_0 \mid z \in Z, t \in \mathbb{R}\} = Z + \mathbb{R}x_0$$

y definimos

$$\phi : W \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(z + tx_0) = F(z) + tc, \quad \forall z \in Z, t \in \mathbb{R}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante por determinar. Tenemos que ϕ es una extensión lineal de F a W , es decir, $\phi|_Z = F$. Para que ϕ sea una extensión de F tal que $\phi \leq p$ en W , es necesario y suficiente que se cumpla

$$\phi(z + tx_0) = F(z) + tc \leq p(z + tx_0) \quad \forall z \in Z, t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Lo que haremos es ver que necesitamos de c para que se cumpla la desigualdad nombrada anteriormente. Primero cogeremos factor comun de t en la desigualdad, y como trabajamos con funciones lineales y sub-lineales aplicando su propiedad para escalares obtenemos lo siguiente

$$t \left[F\left(\frac{z}{t}\right) + c \right] \leq tp\left(\frac{z}{t} + x_0\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y tenemos dos casos:

- Si $t > 0 \implies F\left(\frac{z}{t}\right) + c \leq p\left(\frac{z}{t} + x_0\right) \quad \forall z \in Z$.
- Si $t < 0 \implies F\left(-\frac{z}{t}\right) - c \geq p\left(-\frac{z}{t} - x_0\right) \quad \forall z \in Z$
- Si $t = 0$ no se podría haber sacado factor común, pero en este caso la desigualdad 3.1 se cumple porque $F(z) \leq p(z)$ para todo $z \in Z$.

Ahora si tomamos $x = \frac{z}{t}$ y $y = -\frac{z}{t}$, entonces $x, y \in Z$ y tenemos que c debe cumplir

$$F(x) + c \leq p(x + x_0) \quad \text{y} \quad F(y) - c \leq p(y - x_0) \implies F(y) - p(y - x_0) \leq c \leq p(x + x_0) - F(x)$$

Por lo tanto, c debe cumplir la siguiente desigualdad

$$F(y) - p(y - x_0) \leq c \leq p(x + x_0) - F(x) \quad \forall x, y \in Z$$

notar que aqui hemos generalizado la desigualdad para cualesquiera $x, y \in Z$, ya que x e y dependen de z y t , y z es un elemento arbitrario de Z y t es un escalar arbitrario. Sabiendo que F esta dominada por p (lo vimos antes), tenemos que

$$\begin{aligned} F(x) + F(y) = F(x + y) &\leq p(x + y) = p(x + x_0 + y - x_0) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0) \implies \\ &\implies F(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - F(x) \quad \forall x, y \in Z \end{aligned}$$

Nuestro objetivo ahora es ver si realmente existe ese c , puesto que hemos encontrado las restricciones que debe cumplir, pero no sabemos si puede existir. Para ellos definimos los dos conjuntos siguientes

$$A = \{F(y) - p(y - x_0) \mid y \in Z\} \quad \text{y} \quad B = \{p(x + x_0) - F(x) \mid x \in Z\}$$

y hemos visto que c debe cumplir $a \leq c \leq b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Por lo tanto, si $\sup A \leq \inf B$, entonces existe tal c . Veamos que esto es cierto. Para todo $a \in A$ y $b \in B$, existen $x, y \in Z$ tales que $a = F(y) - p(y - x_0)$ y $b = p(x + x_0) - F(x)$. Entonces, como hemos visto antes, se cumple que $a \leq b$. Por lo tanto, $\sup A \leq \inf B$, lo que implica que existe tal c . Esto demuestra que ϕ es una extensión de F a W tal que $\phi \leq p$ en W . Por lo tanto

$$(W, \phi) \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad (Z, F) \leq (W, \phi)$$

pero como (Z, F) es maximal, entonces $(Z, F) = (W, \phi)$, entonces

$$Z = W = Z + tx_0 \iff x_0 \in Z$$

lo que es una contradicción, ya que $x_0 \in X \setminus Z$. Por lo tanto, $Z = X$, lo que implica que F es una extensión lineal de f a X tal que $F \leq p$ en X , como se pedía. $\square$

Aplicando esto a los espacios normados, obtenemos el siguiente resultado.

3.1. Formulación analítica del teorema de Hahn-Banach

Teorema 3.3. (Hahn-Banach analítico) Sea X un espacio normado, Y un subespacio de X y sea $f \in Y^*$, entonces existe $F \in X^*$ tal que

$$i) \quad F(y) = f(y) \quad \forall y \in Y$$

$$ii) \quad \|F\| = \|f\|$$

Demostración. Sea $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$, entonces p es sub-lineal por ser multiplicación de normas (la aplicación sub-lineal por excelencia) y domina a f , como se ve a continuación

$$f(y) \leq |f(y)| \leq \|f\| \cdot \|y\| = p(y) \quad \forall y \in Y$$

Entonces, por el teorema de Hahn-Banach, existe $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_Y = f$ y $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Entonces

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} p(x) = \sup_{\|x\|=1} \|f\| \cdot \|x\| = \|f\|$$

Por otro lado

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)| \geq \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in Y}} |F(y)| = \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in Y}} |f(y)| = \|f\|$$

Por lo tanto, $\|F\| = \|f\|$. $\square$

Veamos algunas aplicaciones.

Corolario 3.3.1. Sea X un espacio normado y sea $x_0 \in X$, entonces

$$\exists F \in X^* \text{ tal que } F(x_0) = \|x_0\| \text{ y } \|F\| = 1$$

Demostración. Sea $Y = \langle x_0 \rangle$ el subespacio generado por x_0 , y definamos $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(kx_0) = |k| \cdot \|x_0\|$. Entonces, f es lineal y $\|f\| = 1$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_Y = f$ y $\|F\| = 1$. En particular, $F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

Corolario 3.3.2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sean $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, entonces

$$\exists F \in X^* \text{ tal que } F(x_1) \neq F(x_2)$$

Demostración. Sea $F \in X^*$ tal que $F(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\|$, podemos encontrar dicha función por el Corolario 3.3.1, entonces como F es lineal, $F(x_1 - x_2) = F(x_1) - F(x_2)$, de lo cual se sigue que

$$F(x_1) = F(x_2) + \|x_1 - x_2\| \neq F(x_2)$$
□

Corolario 3.3.3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, entonces para todo $x \in X$ se cumple

$$\|x\| = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in X^*}} |f(x)| \quad \left(= \max_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in X^*}} |f(x)| \right)$$

Demostración. Sea $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$, entonces $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = \|x\| \implies |f(x)| \leq \|x\|$. Por lo tanto:

$$\sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|$$

Viceversa, por Hahn-Banach existe $F \in X^*$ tal que $F(x) = \|x\|$ y $\|F\| = 1$. Entonces:

$$|F(x)| = \|x\| \implies \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \geq \|x\|$$

Se sigue que:

$$\sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|$$
□

Corolario 3.3.4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $Y \subseteq X$ un subespacio no denso en X . Entonces existe $F \in X^$ tal que:*

$$\|F\| = 1 \quad \text{y} \quad F = 0 \text{ en } Y$$

Demostración. Sea $Y \subsetneq X$ no denso, entonces $\bar{Y} \subsetneq X$, por lo tanto, existe $x_0 \in X \setminus \bar{Y}$. Sea $Z = \langle x_0, \bar{Y} \rangle$ el subespacio que contiene a Y , es decir:

$$Z = \{kx_0 + y \mid k \in \mathbb{R}, y \in Y\}$$

Definimos $f(z) = f(tx_0 + y) = td(x_0, \bar{Y})$, donde $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$. Veámos que f es lineal

$$f(z_1 + z_2) = f((t_1 + t_2)x_0 + (y_1 + y_2)) = (t_1 + t_2)d(x_0, \bar{Y}) = f(z_1) + f(z_2)$$

Tenemos que f cumple que

$$f(x_0) = d(x_0, \bar{Y}) \quad \text{y} \quad f(y) = 0 \quad \forall y \in \bar{Y}$$

Calculemos finalmente la norma de f :

$$|f(z)| = |f(kx_0 + y)| = |t|d(x_0, \bar{Y}) \stackrel{(*)}{\leq} |t| \left\| x_0 + \frac{y}{t} \right\| = \|tx_0 + y\| = \|z\| \implies \|f\| \leq 1$$

donde en $(*)$ hemos usado que podemos elegir $y' = -\frac{y}{t} \in Y$ arbitrario, ya que

$$d(x_0, \bar{Y}) = \inf_{y' \in \bar{Y}} \|x_0 - y'\| \leq \|x_0 - (-\frac{y}{t})\| = \left\| x_0 + \frac{y}{t} \right\|$$

Sea $(y_n) \in \bar{Y}$ una sucesión tal que $d(x_0, y_n) \rightarrow d(x_0, \bar{Y})$, por lo tanto

$$\begin{aligned} d(x_0, \bar{Y}) &= f(x_0) = f(x_0) - \underbrace{f(y_n)}_0 = f(x_0 - y_n) \leq \\ &\leq |f(x_0 - y_n)| \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y_n\| = \|f\| \cdot d(x_0, y_n) \end{aligned}$$

y cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene

$$d(x_0, \bar{Y}) \leq \|f\| \cdot d(x_0, y_n) \rightarrow \|f\| \cdot d(x_0, \bar{Y}) \implies \|f\| \geq 1$$

y, por lo tanto, se sigue que $\|f\| = 1$. Por el teorema de Hahn-Banach existe $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|F\| = \|f\| = 1$ y $F|_Z = f$. En particular, $F(y) = f(y) = 0$ para todo $y \in Y$, como se quería demostrar. □

Ejercicio 3.1.1. Sea X un espacio normado, entonces para $x \in X$ se cumple

$$x = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall f \in X^*$$

$\implies$) Obvio, si $x = 0$, entonces $f(x) = f(0) = 0$ para todo $f \in X^*$, por linealidad de f .

$\impliedby$) Supongamos que $x \neq 0$, entonces existe $x_0 \in X$ con $x_0 \neq 0$. Por el Corolario 3.3.1, existe $F \in X^*$ tal que $F(x_0) = \|x_0\| \neq 0$ y $\|F\| = 1$. Por lo tanto, $f(x) \neq 0$ para algún $f \in X^*$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $x = 0$.

Ejercicio 3.1.2. Demostrar que si X^* es separable, entonces

$$S^* = \{F \in X^* \mid \|F\| = 1\} \subseteq X^*$$

es separable.

Antes de comenzar con la demostración, recordemos que un espacio X es separable si tiene un subconjunto denso numerable. Visto de otra manera, existe una sucesión $(x_n) \in X$ tal que $\overline{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}} = X$.

Dado que X^* es separable, existe una sucesión (subconjunto numerable) $(f_n) \in X^*$ densa en X^* , entonces, el conjunto $\overline{\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ es denso en X^* . Por lo tanto, el conjunto

$$\overline{\left\{ \frac{f_n}{\|f_n\|} \right\}_{n \in \mathbb{N}}}$$

es denso en $S^* = \{F \in X^* \mid \|F\| = 1\}$, lo que implica que S^* es separable.

De hecho, podríamos haber tomado el conjunto generado por la sucesión $(f_n) \in X^*$, es decir, el conjunto $[\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$ que es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de la sucesión, y luego normalizar cada elemento de ese conjunto, es decir, tomar el conjunto $\left[\left\{ \frac{f_n}{\|f_n\|} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \right]$ que claramente es denso. Para ambos conjuntos se es solo numerable si los **coeficientes son** $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 3.1.3. En l_p con $p \in [1, +\infty)$, se puede definir una base de Schauder $e_i = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$.

Sea $x \in l_p$, entonces x se puede escribir como $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$. Sea $x_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, entonces:

$$\|x - x_n\|_p = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k e_k \right\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ De lo cual } x_n \rightarrow x.$$

donde lo que hemos usado es que como $x \in l_p$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$, lo que

implica que $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

Se tiene demostrado que es base de Schauder, puesto que la sucesión de escalares es única, ya que viene dada univocamente por $x \in l_p$ y hemos demostrado el límite.

Observación. Sea $F \in l_p^*$ (espacio de funciones lineales de vectores de l_p), entonces dado que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base de Schauder, cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, de lo cual:

$$F(x) := F\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k F(e_k)$$

entonces dado $a_k := F(e_k)$, vemos que la sucesión $a_F = (a_1, a_2, \dots)$ caracteriza el funcional.

3.2. Espacio dual y reflexivo

Teorema 3.4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, entonces tenemos que

$$X^* \text{ es separable} \implies X \text{ es separable}$$

Demostración. Sabemos que X^* es separable, por lo tanto, el conjunto $S^* = \{F \in X^* \mid \|F\| = 1\}$ es separable (Ejercicio 2). Entonces, existe una sucesión $(f_n) \in S^*$ densa en S^* . Para cada n , tenemos que

$$\|f_n\| = \sup_{\|x_n\|=1} |f_n(x_n)| = 1 \implies \exists x_n : |f_n(x_n)| > 1/2 \text{ y } \|x_n\| = 1$$

Sea ahora $Y = [\{x_n\}]$ el subespacio generado por la sucesión (x_n) , donde los escalares pertenecen a $\mathbb{Q}$, entonces vamos a demostrar que $\bar{Y} = X$, lo que implica que X es separable.

Supongamos por reducción al absurdo que $\bar{Y} \subsetneq X$, entonces por Hahn-Banach existe $G \in X^*$ tal que $\|G\| = 1$ y $G(y) = 0$ para todo $y \in Y$. Entonces, $G(x_n) = 0$ para todo n . De lo cual se sigue que

$$|f_n(x_n) - G(x_n)| = |f_n(x_n)| > 1/2 \implies 1/2 < |f_n(x_n) - G(x_n)| \leq \|f_n - G\| \cdot \|x_n\| = \|f_n - G\|$$

lo que es una contradicción, porque $\{f_n\}$ es densa en S^* , por lo tanto, debe “acercarse.”^a G . Por lo tanto, $\bar{Y} = X$, lo que implica que X es separable. □

Corolario 3.4.1. $l_\infty \subsetneq l_1^*$ (de lo contrario sería separable).

Definición 3.5. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, entonces el **espacio dual** de X es el espacio

$$X^{**} := \{F : X^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}$$

La función

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J_x \end{aligned}$$

donde $J_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ con $J_x(f) := f(x)$ se llama **inyección canónica** (o mapeo canónico).

Observación. La inyección canónica J es una **función lineal y continua**, veámoslo. Para $x_1, x_2 \in X$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$J_{x_1+tx_2}(f) = f(x_1+tx_2) = f(x_1) + tf(x_2) = J_{x_1}(f) + tJ_{x_2}(f)$$

lo que demuestra que J es lineal. Para ver la continuidad de J , veamos que J_x es continua para cada $x \in X$. Para ello, veamos que J_x es acotada, lo cual implica que es continua. De hecho, para cada $f \in X^*$ se cumple que

$$|J_x f| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \implies \|J_x\| = \sup_{\|f\|=1} |J_x f| \leq \sup_{\|f\|=1} \|f\| \cdot \|x\| = \|x\|$$

donde tenemos que al ser un operador acotado J_x es continuo para todo $x \in X$, entonces J es continuo.

Siguiendo con la lógica de la observación vamos a demostrar que J es una isometría, es decir, $\|J_x\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Para ello, veamos que $\|J_x\| \leq \|x\|$ (visto en la observación) y $\|J_x\| \geq \|x\|$, veámoslo.

Por el corolario de Hahn-Banach para cada $x \in X$, tenemos que $\exists f \in X^*$ tal que $f(x) = \|x\|$ y por lo tanto $\|J_x f\| = |f(x)| = \|x\|$. De lo cual

$$\|J_x\| = \|x\| \quad \text{y por lo tanto} \quad \|J\| = 1$$

por lo que tenemos que J es una **isometría**.

Para demostrar la inyectividad de J , tenemos que dados $x_1 \neq x_2$, entonces

$$\exists f \in X^* : f(x_1) \neq f(x_2) \implies J_{x_1}(f) \neq J_{x_2}(f)$$

lo que demuestra la **inyectividad** de J . De hecho, tenemos que J_x es isomorfismo lineal, y por tanto

$$X \simeq J(X) \subseteq X^{**}$$

Definición 3.6. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, entonces se dice X **reflexivo** si $J : X \rightarrow X^{**}$ es sobreyectiva, y por tanto J es un isomorfismo algebraico y topológico.

Observación. En general, podrían existir isomorfismos entre X y X^{**} sin que J lo sea.

Observación. Si X es reflexivo, entonces X es completo porque X^{**} es completo y, por lo tanto, también X lo es.

Ejemplo. L^p , con $p \in [1, +\infty)$, es reflexivo.

Proposición 3.5. Sea X un espacio reflexivo, entonces cada subespacio cerrado es también reflexivo.

Demostración. Sea $J' : Y \rightarrow Y^{**}$ con Y cerrado, nuestro objetivo es demostrar que J' es sobreyectiva, es decir, que dado $g \in Y^{**}$, existe $y \in Y$ tal que $J'_y = g$.

Sea $g \in Y^{**}$ arbitrario, vamos a definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} f_g : X^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ F &\longmapsto f_g(F) = g(F|_Y) \end{aligned}$$

donde $F|_Y$ es la restricción de F a Y . Está claro que f_g está bien definida, es lineal y continua, por ser restricción de una función lineal y continua, es decir, pertenece a X^{**} .

Puesto que J es sobreyectiva, $\exists x \in X$ tal que $J_x = f_g$. Demostremos que $x \in Y$. Supongamos por reducción al absurdo que $x \notin Y = \bar{Y}$ (la igualdad es por ser Y cerrado), entonces por el corolario de Hahn-Banach 3.3.4 como Y no es denso en X , se cumple que

$$\exists \tilde{F} \in X^* \text{ tal que } \tilde{F}|_Y = 0, \|\tilde{F}\| = 1 \text{ y } \tilde{F}(x) = d(x, Y) > 0$$

Entonces, $x \notin Y \implies \tilde{F}(x) \neq 0$, pero por otro lado

$$0 \neq \tilde{F}(x) = J_x(\tilde{F}) = f_g(\tilde{F}) = g(\tilde{F}|_Y) \stackrel{(**)}{=} g(0) \stackrel{(*)}{=} 0$$

donde en $(*)$ hemos usado que g es lineal, y en $(**)$ que $\tilde{F}|_Y = 0$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $x \in Y$, lo que implica que $J'_x = g$, ya que tenemos que

$$F(x) = J_x(F) = f_g(F) = g(F|_Y) \quad \forall F \in X^* \implies J'_x(F') = g(F'|_Y) = g(F') \quad \forall F' \in Y^*$$

como se quería demostrar.

Si la explicación de antes de $J'_x = g$ no nos es clara, podemos demostrarlo más rigurosamente, de la siguiente manera. Tomemos $h \in Y^*$ arbitrario, demostraremos que $J'_x(h) = g(h)$, donde

$$\begin{aligned} J'_x : Y^{**} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto h(x) \end{aligned}$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, sabemos que todo funcional en un subespacio $Y \subseteq X$ puede extenderse a un funcional F en el espacio total X tal que $F|_Y = h$. Como F es la extensión de h y $x \in Y$, entonces $h(x) = F(x)$.

Usando la igualdad del principio de la ecuación 3.5, es decir, $F(x) = J_x(F)$, tenemos que

$$F(x) = g(F|_Y) = g(h)$$

y finalmente concluimos que $J'_x(h) = h(x) = F(x) = g(h)$. $\square$

Proposición 3.6. Dado dos espacios normados X e Y , y sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado, entonces T^ también lo es y además $\|T^*\| = \|T\|$.*

Proposición 3.7 (Regla de la composición de adjuntos). En general, si tienes dos operadores lineales acotados $A : X \rightarrow Y$ y $B : Y \rightarrow Z$, el adjunto de la composición cumple que

$$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$$

Ejercicio 3.2.1. Si Y y X son isomorfos, entonces

$$X \text{ reflexivo} \iff Y \text{ reflexivo}$$

Supongamos X reflexivo, entonces $J : X \rightarrow X^{**}$ es sobreyectiva. Sea $T : X \rightarrow Y$ un isomorfismo, entonces dado

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\longrightarrow X^* \\ g &\longmapsto T^*(g) = g \circ T \end{aligned}$$

tenemos que es un isomorfismo con inversa $(T^{-1})^*$, ya que

- $(T^*)^{-1} \circ T^* = (T^{-1})^* \circ T^* = (T \circ T^{-1})^* = (Id_Y)^* = Id_{Y^*}$
- $T^* \circ (T^*)^{-1} = T^* \circ (T^{-1})^* = (T^{-1} \circ T)^* = (Id_X)^* = Id_{X^*}$

Veámos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ J \downarrow & & \downarrow J' \\ X^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & Y^{**} \end{array}$$

de donde se deduce que T^{**} es un isomorfismo (podemos pensarlo igual que hemos hecho con T^*). Si demostramos que el diagrama conmutativo es válido, habremos terminado, pues tendríamos que J' es sobreyectiva.

Para ello, necesitamos ver que ambos caminos, superior derecha e inferior izquierda, llevan a la misma función. Teniendo lo siguiente

$$T^{**} \circ J(x) = T^{**}(J_x) = J_x \circ T^* \quad \text{y} \quad J' \circ T(x) = J'(T(x)) = J'_{T(x)}$$

el objetivo será demostrar que

$$J'_{T(x)}(F) = J_x \circ T^*(F) \quad \forall F \in Y^*$$

De hecho, $J'_{T(x)}(F) = F(T(x))$ y $J_x(T^*F) = J_x(F \circ T) = F \circ T(x)$, lo que demuestra la validez del diagrama conmutativo. Por lo tanto, J' es sobreyectiva, lo que implica que Y es reflexivo.

Proposición 3.8. La propiedad de ser reflexivo se mantiene por isomorfismos.

3.3. Formulación geométrica del teorema de Hahn-Banach

Definición 3.7. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional, entonces el conjunto

$$\pi_\alpha = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$$

se llama **hiperplano** de X .

Observación. Decimos que f es un funcional, cuando nos referimos a una función cuyo dominio es un espacio vectorial X y cuyo codominio es el cuerpo de los escalares (que en nuestro curso suele ser $\mathbb{R}$, aunque podría ser $\mathbb{C}$).

Definición 3.8. Un conjunto C en un espacio vectorial X se dice **convexo** si, para cualquier par de puntos $x, y \in C$, el segmento que los une también está contenido íntegramente en C . Matemáticamente, esto se traduce en que se cumple que

$$tx + (1 - t)y \in C, \quad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Definición 3.9. Sean A, B subconjuntos convexos de un espacio vectorial, entonces se dice que un hiperplano π_α **separa** A y B si

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b) \quad \forall a \in A, b \in B$$

Observación. Si X es normado y f es lineal y continua, entonces $\pi_\alpha = f^{-1}(\alpha)$ es cerrado, ya que es la preimagen de un conjunto cerrado por una función continua. De hecho, π_α es un hiperplano cerrado.

Teorema 3.9 (Teorema de Hahn-Banach geométrico). *Sea X un espacio normado y sean A, B convexos disjuntos no vacíos. Si A es abierto, entonces*

$$\exists f \in X^* \text{ y } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tales que } \pi_\alpha^f = \{f = \alpha\} \text{ separa } A \text{ y } B$$

Corolario 3.9.1. *Sea C cerrado y convexo con interior no vacío ($C^\circ \neq \emptyset$) de un espacio normado X , entonces*

$$\forall b \in \partial C, \exists f \in X^* \text{ tal que } f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in C$$

Demostración. Sea $A = C^\circ \neq \emptyset$, podemos ver fácilmente si es convexo, tomando $x, y \in A$, y sea $t \in [0, 1]$ arbitrario, tenemos $z = tx + (1 - t)y$. Por definición de abierto, tenemos que $\exists r_x, r_y > 0$ tales que $B(x, r_x) \subseteq C$ y $B(y, r_y) \subseteq C$. Entonces, si tomamos $r = \min\{r_x, r_y\}$, entonces $B(x, r) \subseteq C$ y $B(y, r) \subseteq C$. Por lo tanto,

$$B(z, r) = z + B(0, r) = t(x + B(0, r)) + (1 - t)(y + B(0, r)) \subseteq tC + (1 - t)C = C \quad (3.2)$$

donde lo que hemos usado es aplicar la propiedad de convexidad de C a los conjuntos $x + B(0, r)$ y $y + B(0, r)$, que son subconjuntos de C .

Por otra parte, tenemos $B = \{b\}$ con $b \in \partial C$, entonces $A \cap B = \emptyset$ son convexos y, por lo tanto, aplicando Teorema 3.9 $\exists f \in X^*, \alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x) \leq \alpha \leq f(b) \quad \forall x \in C^\circ$$

Además, para $b \in \partial C$, tenemos $f(b) \leq f(b)$, por lo que dado que C es cerrado, entonces $C = C^\circ \cup \partial C$, y por lo tanto, $f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in C$. □

Definición 3.10. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto de un espacio normado X . Se dice que A está **todo de un lado** respecto a $\pi_\alpha^{(f)}$ si

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{o bien} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in A$$

Si existe $b \in A$ tal que $f(b) = \alpha$, entonces π_α se llama **hiperplano de soporte** y f se llama **función de soporte**. Podemos ver un ejemplo representativo en la Figura 3.1.

Teorema 3.10 (Teorema de Hahn-Banach fuerte). *Sean A, B conjuntos convexos no vacíos, con A cerrado y B compacto en un espacio normado X . Entonces existen α, β reales con $\alpha < \beta$ y $f \in X^*$ tales que*

$$f(a) \leq \alpha < \beta \leq f(b) \quad \forall a \in A, b \in B$$

Por lo tanto, el intervalo (α, β) separa los dos conjuntos.

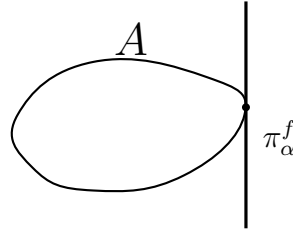


Figura 3.1: Ejemplo de un conjunto convexo A y un hiperplano de soporte π_α^f .

3.4. Integración en espacios de Banach

Sea $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ continua. Queremos definir $\int_0^1 \varphi(t) dt$.

Sea P una partición de $[0, 1]$, es decir, $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$. Definimos las sumas integrales σ_n como

$$\sigma_n := \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{con } \xi_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

Tiene sentido definir φ como integrable si existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n =: y \in X$. Supongamos que y existe, veamos qué propiedades tiene.

Sea $f \in X^*$, entonces

$$f(y) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n\right) \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\sigma_n) \stackrel{(**)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))(t_i - t_{i-1})$$

donde en $(*)$ hemos usado que f continua y en $(**)$ que es lineal. Además, como $f \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, si existe y , podemos definir

$$f(y) = \int_0^1 f(\varphi(t)) dt$$

que obviamente está bien definido porque $f \circ \varphi$ es continua por composición de continuas. Por lo tanto

$$f\left(\int_0^1 \varphi(t) dt\right) = \int_0^1 f \circ \varphi(t) dt \quad \forall f \in X^*$$

donde hemos usado la conmutatividad entre el funcional lineal y la integral.

Definición 3.11. Sea $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ continua. Definimos la integral φ en X como el **único elemento** $y \in X$ tal que

$$f(y) = \int_0^1 f \circ \varphi(t) dt \quad \forall f \in X^*$$

En este caso lo llamamos

$$y := \int_0^1 \varphi(t) dt$$

Observación. No hemos demostrado la existencia de y , pero veámos la unicidad. Sean $y_1, y_2 \in X$ tales que $f(y_1) = f(y_2) \quad \forall f \in X^*$, entonces $f(y_1 - y_2) = 0 \quad \forall f \in X^*$. Aplicando el Corolario 3.3.3, tenemos que

$$\|y_1 - y_2\| = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in X^*}} |f(y_1 - y_2)| \stackrel{(*)}{=} 0 \implies y_1 - y_2 = 0 \implies y_1 = y_2 \quad \sup_{\|f\|=1, f \in X^*}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $f(y_1 - y_2) = 0$ para todo $f \in X^*$. Por lo tanto, la integral de φ es única.

Proposición 3.11. Si $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ es continua, entonces

$$\left\| \int_0^1 \varphi(t) dt \right\| \leq \int_0^1 \|\varphi(t)\| dt$$

Demostración. Sea $y = \int_0^1 \varphi(t) dt$, entonces por Corolario 3.3.1 tenemos que

$$\exists f \in X^* \text{ tal que } f(y) = \|y\| \text{ y } \|f\| = 1$$

entonces

$$\begin{aligned} |f(y)| = \|y\| &= \left\| \int_0^1 \varphi(t) dt \right\| = \left| f \int_0^1 \varphi(t) dt \right| = \left| \int_0^1 f \circ \varphi(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f \circ \varphi| dt = \\ &= \int_0^1 |f(\varphi(t))| dt \leq \int_0^1 \underbrace{\|f\|}_1 \cdot \|\varphi(t)\| dt \leq \int_0^1 \|\varphi(t)\| dt \quad \square \end{aligned}$$

□

Si $\varphi : [a, b] \rightarrow X$ de forma análoga: $f \left(\int_a^b \varphi(t) dt \right) = \int_a^b f \circ \varphi(t) dt \quad \forall f \in X^*$.

Si $\varphi : [a, +\infty) \rightarrow X$, entonces $\int_a^{+\infty} \varphi(t) dt := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(t) dt$ y

$$f \left(\int_a^{+\infty} \varphi(t) dt \right) = \int_a^{+\infty} f \circ \varphi(t) dt \quad \forall f \in X^*$$

En resumen la integral definida para funciones con valores en un espacio de Banach (a menudo llamada **integral de Bochner o de Riemann-Banach**) hereda las propiedades fundamentales del cálculo integral clásico de funciones reales, es decir,

$$\int_0^1 \varphi(t) dt$$

cumple

■ **Lineal respecto al integrando:**

$$\int_a^b (\alpha \varphi(t) + \beta \psi(t)) dt = \alpha \int_a^b \varphi(t) dt + \beta \int_a^b \psi(t) dt, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \varphi, \psi \text{ funciones,}$$

- **Teorema Fundamental del Cálculo(TFCI):** si defines $G(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$, entonces la derivada de esa función es el integrando: $G'(x) = \varphi(x)$.
Si Φ es una primitiva de φ (es decir, $\Phi' = \varphi$), entonces $\int_a^b \varphi(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a)$.
- **Propiedad de la media:** podemos expresarlo de dos manera
 - $\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\varphi(t)\| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|\varphi(t)\|$
 - El valor $\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt$ pertenece a la clausura del casco convexo de la imagen de la función $\varphi([a, b])$.

3.4.1. Applicazioni

Tomemos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A(u(t)) & t \in (0, +\infty) \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

con $A : X \rightarrow X$ en un espacio X de Banach, donde

$$\frac{du}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

Como A es un campo vectorial Lipschitziano, tenemos por definición de **función lipschitziana**

$$\|A(u) - A(v)\| \leq L \cdot \|u - v\| \quad \forall u, v \in X \text{ y } L > 0$$

Mediante la teoría de la integración podemos demostrar que resolver el problema de Cauchy es equivalente a resolverlo en forma integral

$$u(t) - u_0 = \int_0^t A(u(x)) dx$$

A partir de aquí usamos el **Teorema del Punto Fijo de Banach** y llegamos a la existencia y unicidad local del problema de Cauchy. Si A es lineal y continuo, entonces el problema se convierte en

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

que tiene como única solución el mapa exponencial

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \implies u(t) = e^{At} \cdot u_0$$

la cual es solución del problema global $\forall t \in \mathbb{R}$.

En general, el método no siempre funciona. Por ejemplo en el caso

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u \text{ en } \Omega \times (0, 1)$$

si Δ no está acotado en L^2 , entonces se requieren teorías para operadores no acotados.

4. Principio de Acotación Uniforme

Definición 4.1. Sean X, Y espacios normados y sea $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq BL(X, Y)$. Se dice que $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es **uniformemente acotada** si

$$\exists M > 0 : \|T_\alpha\| \leq M \quad \forall \alpha \in A$$

Definición 4.2. Sean X, Y espacios normados y sea $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq BL(X, Y)$. Se dice que $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es **puntualmente acotada** si

$$\forall x \in X : \{T_\alpha(x)\}_{\alpha \in A} \subseteq Y \text{ está acotada}$$

Observación. Si $\{T_\alpha\}$ está acotada uniformemente, entonces $\{T_\alpha\}$ está acotada puntualmente. De hecho:

$$\|T_\alpha(x)\| \leq \|T_\alpha\| \cdot \|x\| \leq M\|x\| \implies \{T_\alpha(x)\} \subseteq Y \text{ está acotada}$$

Teorema 4.1 (Teorema de Banach-Steinhaus o Principio de Acotación Uniforme). Sea X un espacio de Banach e Y un espacio normado, entonces toda familia $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq BL(X, Y)$ puntualmente acotada es también uniformemente acotada. Es decir, si $\forall x \in X \{T_\alpha(x)\}_{\alpha \in A} \subseteq Y$ está acotada, entonces

$$\exists M > 0 : \|T_\alpha\|_{BL(X, Y)} \leq M \quad \forall \alpha \in A$$

Demostración. Definimos $X_n := \{x \in X \mid \|T_\alpha(x)\| \leq n \quad \forall \alpha \in A\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, para saber que es cerrado definimos para cada índice $\alpha \in A$ la aplicación

$$\begin{aligned} h_\alpha : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|T_\alpha(x)\| \end{aligned}$$

continua por ser la composición de T_α con la norma de Y , que es continua. Tenemos entonces que

$$\{x \in X \mid \|T_\alpha(x)\| \leq n\} = h_\alpha^{-1}([0, n])$$

cerrado por ser la preimagen de un conjunto cerrado bajo una aplicación continua, y usando la intersección infinita tenemos

$$X_n = \bigcap_{\alpha \in A} \{x \in X \mid \|T_\alpha(x)\| \leq n\} = \bigcap_{\alpha \in A} X_{n, \alpha}$$

cerrado por ser la intersección de cerrados. Además, se cumple

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

porque $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es puntualmente acotada. Por el Teorema de Baire 2.6, X es de II categoría (X no es unión numerable de conjuntos raros), por lo tanto $\exists n_0 \in \mathbb{N} : X_{n_0}$ no es raro, es decir, $\exists B(x_0, r) \subseteq X_{n_0}$ con $x_0 \in X$ y $r > 0$, de lo cual

$$\begin{aligned} \forall z \in X : \|z\| \leq 1, \quad \forall \alpha \in A, \quad \frac{r}{2} \|T_\alpha(z)\| &= \|T_\alpha\left(\frac{r}{2}z\right)\| \leq \|T_\alpha\left(\frac{r}{2}z + x_0\right)\| + \|T_\alpha(-x_0)\| \leq \\ &\stackrel{(*)}{\leq} n_0 + |-1| \|T_\alpha(x_0)\| \stackrel{(**)}{\leq} 2n_0 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $rz + x_0 \in B(x_0, r) \subseteq X_{n_0}$, es decir, $\|T_\alpha(rz + x_0)\| \leq n_0$ para todo $\alpha \in A$, y en $(**)$ hemos usado que $x_0 \in X_{n_0}$. Por tanto

$$\|T_\alpha(z)\| \leq \frac{2n_0}{r} \quad \forall z : \|z\| \leq 1 \quad \text{y por tanto} \quad \|T_\alpha\| = \sup_{\|z\|=1} \|T_\alpha(z)\| \leq \frac{n_0}{r}$$

□

Notación. Notar que a veces aludiremos a dicho teorema con la abreviación **P.A.U.** (Principio de Acotación Uniforme).

Corolario 4.1.1. Sea X un espacio de Banach e Y un espacio normado, si $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq BL(X, Y)$ converge puntualmente, es decir

$$T_n(x) \longrightarrow T(x) \quad \forall x \in X \text{ en } Y$$

entonces T es lineal y continuo.

Demostración. Dado $x \in X$, $(T_n(x))_n$ converge puntualmente $T(x)$, por lo tanto $(T_n(x))_n$ está acotada. Por el Teorema de Banach-Steinhaus, $\{T_n\}_n$ es uniformemente acotada, es decir

$$\exists M > 0 : \|T_n\| \leq M \quad \forall n$$

Por lo tanto, $\|T_n(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ para todo n , y por lo tanto $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$. Esto implica que T es acotado. Además, dado $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\|T(x + y) - T(x) - T(y)\| = \lim_n \|T_n(x + y) - T_n(x) - T_n(y)\| = 0$$

y

$$\|T(\lambda x) - \lambda T(x)\| = \lim_n \|T_n(\lambda x) - \lambda T_n(x)\| = 0$$

por lo tanto T es lineal, y como hemos visto antes que era acotado, entonces también es continuo al ser lineal. □

Corolario 4.1.2. Si X es un espacio de Banach e Y normado, entonces

$$BL(X, Y) \subseteq L(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \text{ lineales}\}$$

es cerrado.

Demostración. Sea $(T_n) \subseteq BL(X, Y)$ tal que $T_n \longrightarrow T$ en $L(X, Y)$, es decir, $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ para todo $x \in X$. Por el Corolario anterior, T es lineal y continuo, es decir, $T \in BL(X, Y)$. Por lo tanto, $BL(X, Y)$ es cerrado en $L(X, Y)$. □

4.0.1. Aplicaciones

Definición 4.3. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de un espacio normado X es **infinitesimal** si $x_n \rightarrow 0$ en X .

Sea $(a_n) \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge en $\mathbb{R} \quad \forall \{x_n\} \in C_0$ donde

$$C_0 = \{\text{sucesiones } (x_k) \in \mathbb{R} \text{ infinitesimales: } x_k \rightarrow 0 \text{ con norma medida en } \ell_{\infty}\}$$

entonces $(a_n) \in \ell_1$, veámoslo. Sea

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k \quad \text{con } x = (x_k) \in C_0$$

entonces: $F_n : C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal y continuo. Veámos ambas cosas

- **Linealidad:** Dado $x, y \in C_0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} F_n(x + y) &= \sum_{k=1}^n a_k (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n a_k x_k + \sum_{k=1}^n a_k y_k = F_n(x) + F_n(y) \\ F_n(\lambda x) &= \sum_{k=1}^n a_k (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k x_k = \lambda F_n(x) \end{aligned}$$

- **Continuidad:** Dado $x \in C_0$, se tiene que $x_k \rightarrow 0$ y por lo tanto x_k es acotada, ya que por propia definición del límite tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

y tomando $\varepsilon = 1$ se tiene que $|x_n| < 1$ para todo $n \geq N_0$, y como los términos anteriores a N_0 son finitos, entonces $|x_k| \leq M$ para todo k . Tenemos por ser acotada que

$$\|x\|_{\infty} := \sup_k |x_k| < \infty$$

Por lo tanto,

$$|F_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |x_k| \leq \sup_k |x_k| \cdot \sum_{k=1}^n |a_k| = \|x\|_{\infty} \cdot \sum_{k=1}^n |a_k| < \infty \quad (4.1)$$

para todo n , lo que implica que F_n es acotado, y por tanto continuo para todo n .

Tenemos por tanto que

$$F_n \in C_0^* = \{T : C_0 \rightarrow \mathbb{R} : T \text{ lineal y continuo}\}$$

donde C_0^* es el espacio dual continuo de C_0 .

Observemos que $\|F_n\| = \sum_{k=1}^n |a_k| \quad \forall n$, para ello tenemos que tener presente la definición de norma para un funcional, es decir

$$\|F_n\| = \sup_{\|x\|_{\infty}=1} |F_n(x)|$$

y usando la ecuación 4.1 se tiene que $|F_n(x)| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^n |a_k|$, por lo tanto $\|F_n\| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$. Buscamos entonces una sucesión x con $\|x\|_\infty = 1$ tal que $|F_n(x)| = \sum_{k=1}^n |a_k|$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, si tomamos $\tilde{x} = (\tilde{x}_k)$ tal que $\tilde{x} := (1, 1, \dots, \overbrace{1}^n, 0, \dots, 0, \dots)$ entonces $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$, y tenemos

$$|F_n(\tilde{x})| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \cdot 1 \right| = \sum_{k=1}^n |a_k| \implies \|F_n\| = \sum_{k=1}^n |a_k| \quad (4.2)$$

Por otra parte, la hipótesis indicaba que $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ converge para todo $x \in C_0$, por lo que sus sumas parciales están obligatoriamente acotadas. Como $F_n(x)$ es precisamente la suma parcial hasta n , entonces para cada x existe una constante C_x tal que

$$|F_n(x)| \leq C_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que significa que $\{F_n\}_n$ es puntualmente acotada.

Al saber que C_0 es un espacio de Banach, podemos aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus, y por lo tanto $\{F_n\}_n$ es uniformemente acotada, es decir

$$\exists M > 0 : \|F_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{k=1}^n |a_k| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{k=1}^\infty |a_k| \leq M$$

Corolario 4.1.3. Sea X un espacio normado y sea $B \subseteq X$, tenemos que

$$\text{si } f(B) = \{f(x) \mid x \in B\} \text{ acotado } \forall f \in X^* \implies B \text{ está acotado}$$

Demostración. Sea $J : X \rightarrow X^{**}$ el mapa canónico, es decir

$$J_x(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*, \forall x \in X$$

Entonces J es una isometría (lo vimos cuando se definió el espacio dual), es decir

$$\|J_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Para que $(J_x)_{x \in B}$ esté acotada puntualmente, necesitamos que

$$\forall f \in X^* : \{J_x(f)\}_{x \in B} = \{f(x)\}_{x \in B} \text{ esté acotada}$$

pero como sabemos que $f(B) = \{f(x) \mid x \in B\}$ está acotado para todo $f \in X^*$ (hipótesis), entonces se tiene.

Por el Teorema de Banach-Steinhaus, que lo podemos aplicar ya que $J_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ y como $\mathbb{R}$ espacio banach, y X espacio normado, entonces X^* es espacio de banach, entonces tenemos que $(J_x)_{x \in B}$ está acotada uniformemente en X^{**} , es decir:

$$\exists M > 0 : \|J_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \leq M \quad \forall x \in B$$

lo que implica que B está acotado. □

Ejercicio 1. Sea $a_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_k a_k x_k < +\infty \quad \forall x = (x_k) \in \ell_1$, demuestra que entonces $(a_n) \in \ell_\infty$.

Sea

$$\begin{aligned} F_n : \ell_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k \end{aligned}$$

donde recordamos que

$$\ell_1 = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty\}$$

con la norma $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, entonces F_n es lineal y continuo, veámoslo, fijando $n \in \mathbb{N}$.

■ **Linealidad:** Dado $x, y \in \ell_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} F_n(x + y) &= \sum_{k=1}^n a_k (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n a_k x_k + \sum_{k=1}^n a_k y_k = F_n(x) + F_n(y) \\ F_n(\lambda x) &= \sum_{k=1}^n a_k (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k x_k = \lambda F_n(x) \end{aligned}$$

■ **Continuidad:** Dado $x \in \ell_1$, se tiene que

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty$$

entonces, el objetivo será ver si $|F_n(x)| \leq M \|x\|_1$ con $M > 0$, veámoslo

$$|F_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |x_k| \leq \max_k |a_k| \cdot \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \max_k |a_k| \cdot \|x\|_1 < +\infty$$

por lo que F_n es acotado, y por tanto continuo para todo n .

Observemos ahora que $\|F_n\| = \max_{k=1, \dots, n} |a_k|$, para ello usaremos la definición de norma de operadores lineales, es decir

$$\|F_n\| = \sup_{\|x\|_1} |F_n(x)| \leq \sup_{\|x\|_1} \max_{k=1, \dots, n} |a_k| \cdot \|x\|_1 = \max_{k=1, \dots, n} |a_k|$$

Viendo la desigualdad dada, buscaremos un $x \in \ell_1$ con $\|x\|_1 = 1$ tal que $|F_n(x)| = \max_{k=1, \dots, n} |a_k|$, y tendríamos la igualdad buscada. Sea $\tilde{x} \in \ell_1$ tal que

$$\tilde{x} = \begin{cases} 0 & k \neq \tilde{k} \\ a_{\tilde{k}} & k = \tilde{k} \end{cases} \quad \text{con } a_{\tilde{k}} = \max_{k=1, \dots, n} |a_k|$$

entonces tenemos que

$$|F_n(\tilde{x})| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \tilde{x}_k \right| = |a_{\tilde{k}}| = \max_{k=1, \dots, n} |a_k|$$

y por lo tanto $\|F_n\| = \max_{k=1, \dots, n} |a_k|$.

Por otra parte, como bien demostramos que para todo $x \in \ell_1$ se tiene que $|F_n(x)|$ está acotada, entonces tenemos que $\{F_n\}_n$ es puntualmente acotada. Por el Teorema de Banach-Steinhaus, tenemos ℓ_1 espacio de Banach, $\{F_n\}_n$ es uniformemente acotada, es decir

$$\exists M > 0 : \|F_n\| = \max_{k=1, \dots, n} |a_k| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies |a_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies (a_n) \in \ell_\infty$$

Ejercicio 2. Sea $X = \{\text{polinomios}, t \in [0, 1]\}$ con $\|p\| = \max_{j=0, \dots, \deg p} |a_j|$. Sea

$$F_n : \quad X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \sum_{j=1}^n a_j t^j \longmapsto \sum_{j=1}^n a_j$$

mostrar que F_n son continuos pero no uniformemente acotados.

Para demostrar que F_n lo que queremos es ver que es un operador lineal y después demostrar la acotación, que equivale en operadores lineales a la continuidad. Para la linealidad, dado $p, q \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$F_n(p+q) = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j = F_n(p) + F_n(q) \\ F_n(\lambda p) = \sum_{j=1}^n \lambda a_j = \lambda \sum_{j=1}^n a_j = \lambda F_n(p)$$

para la continuidad, dado $p \in X$, se tiene que

$$|F_n(p)| = \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| \leq n \cdot \max_{j=1, \dots, n} |a_j| \stackrel{(*)}{\leq} n \cdot \|p\|$$

donde en $(*)$ hemos usado que la definición de norma toma el máximo de $|a_j|$, pero incluyendo $j = 0$, de ahí que pongamos el $\leq$ en lugar de la igualdad. Al igual que antes aplicando la definición de norma de operadores lineales, se tiene que

$$\|F_n\| = \sup_{\|p\|=1} |F_n(p)| \leq \sup_{\|p\|=1} n \cdot \|p\| = n$$

por lo que F_n es continuo para todo n .

Siguiendo la misma dinámica de antes, definimos un polinomio concreto para ver la igualdad en $\|F_n\|$, es decir, definimos $p^* = \sum_{k=1}^n t^k$, entonces

$$|F_n(p^*)| = \left| \sum_{k=1}^n 1 \right| = n \implies \|F_n\| = n$$

es claro que tenemos que $\{F_n\}$ no está uniformemente acotada, ya que $\|F_n\| = n$ para todo n , y por lo tanto no existe $M > 0$ tal que $\|F_n\| \leq M$ para todo n . De hecho, $(X, \|\cdot\|)$ no es un espacio de Banach y, por lo tanto, el P.A.U. no es válido.

Es importante notar aquí que la elección de p^* esta hecha en función de F_n , es decir, el grado de p^* es n_0 concreto para F_{n_0} , y por lo tanto para la acotación uniforme no es un polinomio fijo para todos los F_n , sino que cada F_n tiene su propio polinomio p con el que se alcanza la igualdad en la norma de operadores lineales. Esto es de vital importancia, puesto que **SI** cumple la acotación puntual, ya que si tomo mi p^* particular para un F_{n_0} concreto, entonces $|F_{n_0}| = n_0$, pero para $n > n_0$ tendríamos el mismo valor $|F_n(p^*)| = n_0$, por lo que la acotación puntual se cumple, al tener una sucesión convergente en la constante n_0 .

5. Teorema de la Aplicación Abierta

Corolario 5.0.1. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y solo si la imagen inversa de cualquier abierto es un abierto.

Es decir: si $V \subseteq Y$ es abierto $\implies f^{-1}(V) \subseteq X$ es abierto

Definición 5.1. Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ una aplicación lineal. Se dice que T es **abierto** si $T(A)$ es abierto para todo $A \subseteq X$ abierto.

Teorema 5.1 (Teorema de la aplicación abierta). Sean X, Y espacios de Banach y $T \in BL(X, Y)$ sobreyectiva, entonces T es abierta.

Demostración. Para la demostración utilizamos la siguiente proposición:

Proposición. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in BL(X, Y)$ sobreyectiva. Entonces

$$\forall r > 0, \exists s > 0 \text{ tal que } B^Y(0, s) \subseteq T(B^X(0, r))$$

Dada la proposición, sea ahora G abierto en X y sea $x_0 \in G$, tenemos

$$\exists r > 0 : B_r(x_0) \subseteq G \implies x_0 + B_r(0) \subseteq G$$

Entonces $T(x_0) \in T(G)$ y, por la proposición

$$\exists s > 0 : B^Y(0, s) \subseteq T(B^X(0, r))$$

Ahora

$$\begin{aligned} B^Y(T(x_0), s) &= T(x_0) + B^Y(0, s) \subseteq T(x_0) + T(B^X(0, r)) = T(x_0 + B^X(0, r)) \\ &= T(B^X(x_0, r)) \subseteq T(G) \implies B^Y(T(x_0), s) \subseteq T(G) \quad \forall x_0 \in G \end{aligned}$$

entonces tenemos que $\forall y \in T(G), \exists s > 0 : B^Y(y, s) \subseteq T(G)$, es decir, $T(G)$ es abierto. $\square$

Corolario 5.1.1. Sea $T \in BL(X, Y)$ con X, Y espacios de Banach y T biyectiva, entonces

$$T^{-1} \in BL(Y, X)$$

Demostración. Por el teorema de la aplicación abierta, T es abierta, es decir,

$$\forall V \subseteq X, \text{abierto} \implies T(V) \subseteq Y \text{abierto}$$

y para demostrar que T^{-1} es continua, basta con demostrar que la imagen inversa de un abierto por T^{-1} es un abierto, es decir,

$$\forall V \subseteq Y, \text{abierto} \implies (T^{-1})^{-1}(V) \subseteq X \text{abierto}$$

pero esto es cierto, ya que $(T^{-1})^{-1}(V) = T(V)$, y por ser T abierta, $T(V)$ es abierto.

Por otra parte, la linealidad de T^{-1} se sigue de la linealidad de T y de la definición de inversa, es decir, para $y_1, y_2 \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda y_1 + y_2) &= T^{-1}(\lambda T(T^{-1}(y_1)) + T(T^{-1}(y_2))) = T^{-1}(T(\lambda T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2))) \\ &= \lambda T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

y por lo tanto T^{-1} es lineal, es decir, tenemos $T^{-1} \in BL(Y, X)$. $\square$

Definición 5.2. Sean X, Y espacios topológicos, y f una función de X a Y ; entonces, f es un **homeomorfismo** si se cumple que:

- f es una biyección
- f es continua
- La inversa de f es continua

5.0.1. Aplicaciones

Una de las aplicaciones más importantes del teorema de la aplicación abierta es la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales. Queremos demostrar que si podemos aproximar una función “difícil” (f) mediante funciones “fáciles” (polinomios p_n), entonces las soluciones de la ecuación diferencial para esos polinomios (x_n) también aproximarán la solución real (x). Vamos a desglosarlo paso a paso con rigor e intuición.

Consideremos el espacio

$$C^1([0, 1]) = \{x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas, derivables y } x' \text{ continua}\}$$

con la norma $\|x\|_{C^1} := \|x\|_{L^\infty} + \|x'\|_{L^\infty}$, el cual es de Banach. Sea

$$X = \{x \in C^1([0, 1]) \mid x(0) = x(1) = 0\} \subseteq C^1([0, 1])$$

un subespacio cerrado en $C^1([0, 1])$ y, por lo tanto, de Banach. Sea

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow C^0([0, 1]) \\ x &\longmapsto \alpha x' + \beta x \end{aligned}$$

con $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas. Supongamos que T sea biyectiva, es decir

$$\forall f \in C^0([0, 1]) \exists! x \in X : \alpha x' + \beta x = f \implies \begin{cases} \alpha x' + \beta x = f \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad \text{admite una única solución}$$

Teorema 5.2 (Teorema de Aproximación de Weierstrass). *Si f es una función real continua en $[a, b]$, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un polinomio p tal que $|f(t) - p(t)| < \epsilon$ para todo $t \in [a, b]$.*

Esto equivale a decir, que el espacio de los polinomios es denso en $C^0([a, b])$ con la norma del supremo.

Sean $(p_n) \in C^0([0, 1])$ polinomios tales que $p_n \rightarrow f$ uniformemente, es decir, existe la sucesión de polinomios (p_n) tal que $\|p_n - f\|_{L^\infty} \rightarrow 0$, entonces tenemos que

$$\forall p_n \exists! x_n : \begin{cases} \alpha x'_n + \beta x_n = p_n \\ x_n(0) = x_n(1) = 0 \end{cases} \quad \text{es decir, } T(x_n) = p_n \text{ con } (x_n) \in X. \text{ Se sigue que:}$$

Aplicando el corolario del teorema de la aplicación abierta, tenemos que T es un homeomorfismo, es decir, T es continua, biyectiva y su inversa es continua. Por lo tanto, como

$$p_n \rightarrow f \xRightarrow{T^{-1} \text{ cont.}} T^{-1}(p_n) \rightarrow T^{-1}(f) \implies x_n \rightarrow x$$

Ejercicio 1. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in BL(X, Y)$ inyectiva. Demostrar que

$$T^{-1} : T(X) \rightarrow X \text{ es continua} \iff T(X) \text{ es cerrado en } Y$$

Demostración. Por hipótesis $T : X \rightarrow T(X)$ es biyectiva, al aplicar el teorema de la aplicación abierta y tener T sobreyectiva (además de inyectiva por hipótesis del ejercicio), tenemos T biyectiva, por lo tanto T es un homeomorfismo.

$\implies$) Como $T(X) \simeq X$ y X es de Banach, entonces $T(X)$ es de Banach, por lo tanto $T(X)$ es cerrado en Y , por ser subespacio de Banach, de Y .

$\impliedby$) Si $T(X)$ es cerrado en Y de Banach, entonces $T(X)$ es de Banach, por lo tanto $T \in BL(X, T(X))$ y por el teorema de la aplicación abierta, T abierta y $T^{-1} : T(X) \rightarrow X$ es continua.

□

Corolario 5.2.1. Sea X un espacio vectorial y sean $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ espacios de Banach, y supongamos que $\exists M > 0 : \|x\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1$, entonces

$$(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2) \text{ son equivalentes}$$

Demostración. Sea Id la aplicación identidad entre ambos espacios de Banach, entonces como

$$Id : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_2) \text{ es acotada} \implies Id \text{ es continua, lineal y biyectiva}$$

lo cual es claro, pues la identidad es lineal y biyectiva, y por la desigualdad dada en la hipótesis

$$\exists M > 0 : \|x\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1$$

Id es acotada, es decir, continua, por ser equivalente ambas propiedades en operadores lineales.

Por aplicación abierta Id^{-1} es continua, entonces acotada, es decir

$$\exists C > 0 : \|x\|_1 \leq C \cdot \|x\|_2$$

por lo que $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ son equivalentes.

□

5.1. Teorema del Gráfico Cerrado

Definición 5.3. Sea $T : X \rightarrow Y$ una aplicación entre espacios normados. Se dice que

$$\Gamma_T = \{(x, T(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

es el **gráfico** de T .

Definición 5.4. Sea $T : X \rightarrow Y$ con X, Y espacios normados. Se dice que $T : X \rightarrow Y$ es **cerrado** si Γ_T es cerrado en $X \times Y$.

Proposición 5.3. Sea $T : X \rightarrow Y$ una aplicación entre espacios normados, entonces

Γ_T es cerrado en $X \times Y \iff \forall (x_n) \subseteq X : x_n \rightarrow x$ y $T(x_n) \rightarrow y$, entonces $y = T(x)$

Demostración. $\implies$ Sea $(x_n) \subseteq X : x_n \rightarrow x$ y $T(x_n) \rightarrow y$, entonces $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y)$ en Γ_T cerrado, es decir, $(x, y) \in \Gamma_T$ de lo cual $y = T(x)$.

$\impliedby$ Sea $(x_n, y_n) \in \Gamma_T$ tal que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$, entonces

$$(x_n, y_n) \in \Gamma_T \text{ con } y_n = T(x_n)$$

y por lo tanto $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y)$. Por hipótesis $y = T(x)$. □

Observación. Si T es continua, entonces Γ_T es cerrado. De hecho

$$\text{si } x_n \rightarrow x, \text{ entonces } T(x_n) \rightarrow T(x)$$

y por lo tanto $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, T(x)) \quad \forall (x_n) \rightarrow x$.

Si T no es continua, entonces no es cierto en general, veámos dos ejemplos

- Sea la función

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

no es continua en 0, pero dado su gráfico

$$\Gamma_T = \{(x, T(x)) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 1/x) : x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

podemos ver que es cerrado en $\mathbb{R}$ (notar que no es completo).

- Sea la función

$$T : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{L^\infty}) \longrightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^\infty}) \\ x \longmapsto x'$$

es lineal, para ver que no es continua, tomemos el ejemplo de esta función

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sin(nt)$$

donde tenemos ciertos puntos a destacar

- La norma en el dominio (X) es

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\sin(nt)| = 1 \quad \forall n$$

- La imagen del operador es

$$T(f_n) = f'_n(t) = n \cos(nt)$$

- La norma en el codominio (Y) es

$$\|T(f_n)\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |n \cos(nt)| = n$$

y ahora vemos que mientras la “entrada” f_n tiene siempre tamaño 1, la “salida” $T(f_n)$ crece hasta el infinito cuando $n \rightarrow \infty$, y entonces tenemos que

$$\nexists M > 0 : \|T(f_n)\|_\infty = n \leq M \cdot \|f_n\|_\infty = 1 \quad \forall n$$

por lo que el operador no es acotado y, por tanto, no es continuo. Sin embargo, Γ_T es cerrado porque si

$$x_n \xrightarrow{\text{unif.}} x \text{ y } T(x_n) = x'_n \xrightarrow{\text{unif.}} y \text{ en } Y$$

entonces $y = T(x)$ (TFC). Notar que dada la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ es por eso que la convergencia por definición de la norma es convergencia uniforme.

Teorema 5.4 (Gráfico cerrado). Sean X, Y espacios de Banach, tenemos que si

$$T : X \rightarrow Y \text{ es lineal y cerrada} \implies T \text{ es continua}$$

Demostración. Sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas definidas sobre X de la siguiente forma

$$\|x\|_1 := \|x\|_X + \|T(x)\|_Y, \quad \|x\|_2 = \|x\|_X$$

es claro que $\|\cdot\|_2$ es de Banach, por ser igual a $\|\cdot\|_X$, pero para el caso de $\|\cdot\|_1$ tenemos que comprobarlo.

Para ello primero vemos que si (x_n) es de Cauchy en $(X, \|\cdot\|_1)$, entonces (x_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_X$ y $(\|T(x_n)\|)_Y$, ya que por ser de Cauchy en $(X, \|\cdot\|_1)$, entonces

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tal que si } n, m > N, \text{ entonces } \|x_n - x_m\|_1 = \|x_n - x_m\|_X + \|T(x_n) - T(x_m)\|_Y < \epsilon$$

con lo que concluimos sabiendo que ambos términos (las normas) son no negativos que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_X &\leq \|x_n - x_m\|_1 < \epsilon \\ \|T(x_n) - T(x_m)\|_Y &\leq \|x_n - x_m\|_1 < \epsilon \end{aligned}$$

es decir, (x_n) es de Cauchy en ambas normas. Por lo que, sea (x_n) de Cauchy en $(X, \|\cdot\|_1)$, entonces (x_n) es de Cauchy en ambas normas, y como son respectivamente espacios de Banach, son completos, es decir

$$\exists x \in X : \|x_n - x\|_X \rightarrow 0 \quad \text{y } y \in Y : \|T(x_n) - y\|_Y \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

por lo que para demostrar que $\|\cdot\|_1$ es de Banach, basta con ver

$$\|x_n - x\|_1 = \|x_n - x\|_X + \|T(x_n) - T(x)\|_Y \rightarrow 0$$

donde teniendo que el primer término converge a 0 por la ecuación 5.1, el segundo lo hace si vemos que $y = T(x)$. Por hipótesis Γ_T es cerrado y se cumple que

$$(x_n, T(x_n)) \in \Gamma_T \quad \forall n \quad \text{y} \quad (x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y) \in \Gamma_T \implies y = T(x)$$

por lo que $(X, \|\cdot\|_1)$ es de Banach.

Ahora, como $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ y por el Corolario 5.2.1 del teorema de la aplicación abierta, $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$ son equivalentes, por lo tanto

$$\exists M > 0 : \|x\|_1 \leq M\|x\|_2 \iff \|x\|_X + \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \iff \|T(x)\|_Y \leq (M-1)\|x\|_X$$

de lo cual T es acotado, es decir, continua. $\square$

Corolario 5.4.1. Sea $T : X \rightarrow Y$ lineal con X, Y espacios de Banach, tenemos que si

$$T \text{ es cerrada y inyectiva} \implies T^{-1} \text{ continua}$$

Demostración. Puesto que T es cerrada, entonces T es continua por Teorema del Gráfico Cerrado, por lo que teniendo ahora T inyectividad, tenemos que

- Si T es sobreyectiva, tenemos que Y es de Banach por hipótesis.
- Si T no es sobreyectiva, entonces $T(X)$ es un subespacio de Y que es de Banach por ser homeomorfo a X , y por lo tanto cerrado en Y .

Ahora teniendo T biyectiva y $T \in BL(X, T(X))$ o $T \in BL(X, Y)$ por el corolario del teorema de la aplicación abierta, tenemos que T^{-1} continua. $\square$

5.2. Ortogonalidad en espacios de Banach

En esta sección tomaremos X un espacio de Banach, $M \subseteq X$ un subespacio de X y $N \subseteq X^*$ un subespacio de X^* .

Definición 5.5. Se define el **ortogonal** de M como el subespacio $M^\perp \subseteq X^*$ tal que

$$M^\perp := \{f \in X^* \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in M\}$$

Se define el **ortogonal** de N como el subespacio $N^\perp \subseteq X$ tal que

$$N^\perp := \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in N\}$$

$M^\perp$ y $N^\perp$ son llamados **aniquiladores**.

Observación. $M^\perp$ y $N^\perp$ son subespacios cerrados incluso si M y N no lo son.

Proposición 5.5. Sea $M \subseteq X, N \subseteq X^*$, se cumple:

$$i) (M^\perp)^\perp = \overline{M}$$

ii) $\overline{N} \subseteq (N^\perp)^\perp$. Si X es reflexivo, se cumple $(N^\perp)^\perp = \overline{N}$

Demostración. i) Sea $x \in M$, entonces

$$f(x) = 0 \forall f \in M^\perp \quad \text{y} \quad (M^\perp)^\perp = \{x \in X \mid f(x) = 0 \forall f \in M^\perp\} = \bigcap_{f \in M^\perp} \text{Ker}(f)$$

de lo cual $x \in (M^\perp)^\perp$ y por lo tanto $M \subseteq (M^\perp)^\perp$. Como $(M^\perp)^\perp$ es cerrado, entonces $\overline{M} \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Para el caso de la inclusión contraria, supongamos por reducción al absurdo que $(M^\perp)^\perp \not\subseteq \overline{M}$, es decir,

$$\exists x_0 \in (M^\perp)^\perp : x_0 \notin \overline{M}$$

Consideremos $A = \{x_0\}$, $B = \overline{M}$. Tenemos que A es compacto porque todo conjunto finito de puntos es compacto, y B es cerrado y convexo, donde ser convexo es conclusión clara de ser un subespacio vectorial

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \overline{M} \quad \forall x, y \in \overline{M}, \lambda \in [0, 1]$$

Aplicando ahora el teorema de Hahn-Banach geométrico, $\exists \tilde{f} \in X^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tilde{f}(x) \leq \beta < \alpha \leq \tilde{f}(x_0) \quad \forall x \in B = \overline{M}$$

Pero como $\overline{M}$ es un subespacio vectorial, entonces si tuvieramos $x' \in \overline{M}$ tal que $\tilde{f}(x') > 0$, entonces $\tilde{f}(\lambda x') = \lambda \tilde{f}(x') > 0$ para $\lambda > 0$, es decir, $\tilde{f}$ no estaría acotada y sería una contradicción, porque antes teníamos que

$$\tilde{f}(x) < \alpha \quad \forall x \in M$$

entonces $\tilde{f} = 0 \forall x \in M$, es decir, $\tilde{f} \in M^\perp$. Ahora tenemos

$$0 < \alpha \leq \tilde{f}(x_0) \implies \tilde{f}(x_0) > 0$$

pero dijimos que $\tilde{f}(x_0) = 0$ porque $x_0 \in (M^\perp)^\perp$, lo cual es una contradicción, por lo que $(M^\perp)^\perp \subseteq \overline{M}$ y por lo tanto $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

ii) HACER

□

Proposición 5.6. Sean M_1, M_2 subespacios de X , entonces

1. $M_1 \cap M_2 = (M_1^\perp + M_2^\perp)^\perp$
2. $M_1^\perp \cap M_2^\perp = (M_1 + M_2)^\perp$
3. $\overline{M_1^\perp + M_2^\perp} \subseteq (M_1 \cap M_2)^\perp$
4. $(M_1^\perp \cap M_2^\perp)^\perp = \overline{M_1 + M_2}$

5.3. Operadores no acotados

Definición 5.6. Sean X, Y espacios de Banach y sea $D(T)$ un subespacio denso de X , un operador lineal T definido como sigue

$$T : D(T) \rightarrow Y$$

se dice **no acotado**.

Observación. La definición extiende la definición de operador acotado porque $D(T)$ no es cerrado en general y, por lo tanto, no es necesariamente de Banach.

Observación. En general, T no envía acotados en acotados.

Definición 5.7. Dado $T : D(T) \rightarrow Y$ no acotado, si

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \|T(x)\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in D(T)$$

entonces T se dice **acotado** en $D(T)$.

Definición 5.8. Sea $T : D(T) \rightarrow Y$ no acotado, definimos los subespacios.

- $\text{Ker}(T) := \{x \in D(T) \mid T(x) = 0\}$
- $R(T) := \{y \in Y \mid y = T(x) \text{ para algún } x \in D(T)\}$ (**rango**)

Definición 5.9. Sea $T : D(T) \rightarrow Y$ no acotado. T se dice **densamente definido** en X si $D(T)$ es denso en X .

Proposición 5.7. Si T es cerrado, entonces $\text{Ker}(T)$ es cerrado.

Demostración. Sea $(x_n) \subseteq \text{Ker}(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$, entonces $(x_n, T(x_n)) \in \Gamma_T$ cerrado, es decir, $(x_n, 0) \rightarrow (x, 0)$ de lo cual $T(x) = 0$, es decir, $x \in \text{Ker}(T)$ y por lo tanto $\text{Ker}(T)$ es cerrado. $\square$

Ejemplo. Sea la función

$$T : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \\ u \longmapsto u'$$

está densamente definido en $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ y es cerrado, veámos estas afirmaciones por separado:

- Sabemos que $C^1([0, 1]) \subseteq C^0([0, 1])$ y que $C^1([0, 1])$ es denso en $C^0([0, 1])$, de hecho, dado $f \in C^0([0, 1])$, por el teorema de Weierstrass existe una sucesión de polinomios (p_n) tal que $p_n \rightarrow f$ uniformemente, es decir, $\|p_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, y como todo polinomio es de clase C^1 , entonces $p_n \in C^1([0, 1])$ y por lo tanto $C^1([0, 1])$ es denso en $C^0([0, 1])$.

- Para ver que T es cerrado, tenemos que demostrar que Γ_T es cerrado en $C^1([0, 1]) \times C^0([0, 1])$.

Supongamos una sucesión $(u_n) \subseteq C^1([0, 1])$ tal que $u_n \rightarrow u$ en $(C^0, \|\cdot\|_\infty)$ y $T(u_n) = u'_n \rightarrow v$ en $(C^0, \|\cdot\|_\infty)$, entonces el resultado del cálculo clásico nos dice que

“Si una sucesión de funciones derivables converge uniformemente a u , y sus derivadas convergen uniformemente a v , entonces la función límite u es derivable y su derivada es exactamente v ($u' = v$)”

lo que implica que u es derivable y $u' = v$, es decir, $u \in C^1([0, 1])$ y $T(u) = v$, por lo que Γ_T es cerrado.

Ejercicio 5.3.1. Sean X, Y espacios de Banach y $T : D(T) \rightarrow Y$ lineal, densamente definido y acotado. Entonces T se puede extender unívocamente a un operador $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ acotado.

Por hipótesis $\overline{D(T)} = X$, por lo que

$$\forall x \in X \quad \exists (x_n) \in D(T) \text{ tal que } x_n \rightarrow x$$

Definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{T} : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) \end{aligned}$$

de donde, si $x \in D(T)$ entonces $\tilde{T}(x) = T(x)$, es decir, $\tilde{T}$ es una extensión de T . Ahora veamos que es acotada, para ello buscaremos primero la igualdad $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, veámoslo

- Tenemos que

$$\|\tilde{T}(x)\| = \|\lim_n T(x_n)\| = \lim_n \|T(x_n)\| \stackrel{(*)}{\leq} \lim_n \|T\| \cdot \|x_n\| = \|T\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|\tilde{T}\| \leq \|T\| \Rightarrow \tilde{T} \in BL(X, Y)$$

donde en $(*)$ se ha usado la acotación de T .

- $x \in D(T) : \|T(x)\| = \|\tilde{T}(x)\| \leq \|\tilde{T}\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|T\| \leq \|\tilde{T}\|.$

De lo cual $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. Es importante notar que la acotación se ha probado en la primera parte de la desigualdad, pero hemos hecho el segundo desarrollo para ver que se da la igualdad de las normas.

5.3.1. Operador Adjunto

A continuación trabajaremos con el operador $T : D(T) \rightarrow Y$ densamente definido en X y con X, Y espacios de Banach, y usaremos el operador adjunto T^* definido en

$$D(T^*) = \{g \in Y^* \mid \exists C > 0 \text{ tal que } |\langle g, T(u) \rangle| \leq C \cdot \|u\| \quad \forall u \in D(T)\}$$

donde $\langle g, T(u) \rangle = g(T(u))$.

Proposición 5.8. Si el operador T es acotado, entonces

$$D(T^*) = Y^*$$

Demostración.

$$\|g \circ T(u)\| \leq \|g\| \cdot \|T\| \cdot \|u\| \quad \forall g \in Y^* \Rightarrow D(T^*) = Y^*$$

donde hemos usado que g es acotada por $g \in Y^*$. □

Sea la siguiente función

$$\begin{aligned} f : D(T) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \langle g, T(u) \rangle \end{aligned}$$

donde $g \in D(T^*)$, entonces f es acotada, ya que

$$|f(u)| = |\langle g, T(u) \rangle| \leq C \cdot \|u\| \quad \forall u \in D(T)$$

Por hipótesis $D(T)$ es denso en X , para poder definir T^* , y además como f es acotada, entonces f puede ser extendida a $F \in X^*$, es decir

$$\exists F \in X^* : F(u) = f(u) = \langle g, T(u) \rangle \quad \forall u \in D(T)$$

Dada esta conclusión podemos definir correctamente el operador adjunto T^* de T de la siguiente manera, veámoslo.

Definición 5.10. Sea $T : D(T) \longrightarrow Y$ densamente definido en X con X, Y espacios de Banach. Definimos el **operador adjunto** T^* de T como el operador

$$\begin{aligned} T^* : D(T^*) &\longrightarrow X^* \\ g &\longmapsto T^*(g) = F \end{aligned}$$

para el cual tenemos que

$$\langle T^*g, u \rangle = (T^*g)(u) = F(u) = f(u) = \langle g, T(u) \rangle \quad \forall u \in D(T), \forall g \in D(T^*)$$

donde $D(T^*)$ es el subespacio de Y^* definido por

$$D(T^*) := \{g \in Y^* \mid \exists C > 0 \text{ tal que } |\langle g, T(u) \rangle| \leq C \cdot \|u\| \quad \forall u \in D(T)\}$$

donde $\langle g, T(u) \rangle = g(T(u))$.

Ejercicio 5.3.2. Sea $X = L^2(\Omega)$, $\Omega = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y sea $H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ donde

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \partial_x f \in L^2(\Omega) \text{ y } Tr f = 0\}$$

Demostrar que la siguiente función

$$\begin{array}{ccc} T : H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$$

es un operador lineal, densamente definido y no acotado.

Antes de iniciar la resolución vamos a tener claro que tipo de funciones contiene $H_0^1(\Omega)$, para ello, dado $f \in H_0^1(\Omega)$, entonces f es una función de cuadrado integrable ($f \in L^2(\Omega)$), es decir

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty$$

y debe cumplir dos condiciones

- $\partial_x f \in L^2(\Omega)$, es decir, la derivada de f también es de cuadrado integrable, lo que implica que f es una función de clase C^1 .
- $Tr f = 0$, es decir, la traza de f es nula, lo que implica que $f(0) = f(1) = 0$.

Sabiendo esto, demostremos lo que se pide para T .

No acotado. Tomemos la sucesión de funciones

$$u_n(x) = \sin(2\pi nx)$$

entonces $u_n \in H_0^1(\Omega)$ porque u_n es de clase C^1 , su derivada es de cuadrado integrable y su traza es nula. Ahora, veamos que el operador no es acotado, para ello, calculemos la norma de $T(u_n)$ y la norma de u_n , donde $T(u_m) = u'_m = 2\pi m \cos(2\pi mx)$.

$$\begin{aligned} \|u_n\| &= \sqrt{\int_0^1 \sin^2(2\pi nx) dx} = \sqrt{1/2} \quad \forall n \\ \|T(u_n)\| &= 2\pi n \sqrt{\int_0^1 \cos^2(2\pi nx) dx} = 2\pi n \sqrt{1/2} \end{aligned}$$

con los desarrollos siguientes

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin^2(2\pi nx) dx &\stackrel{(*)}{=} \int_0^1 \frac{1 - \cos(4\pi nx)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(4\pi nx) dx = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin(4\pi nx)}{4\pi n} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(4\pi n) - \sin(0)}{4\pi n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{0 - 0}{4\pi n} = \frac{1}{2} \\ \int_0^1 \cos^2(2\pi nx) dx &\stackrel{(**)}{=} \int_0^1 \frac{1 + \cos(4\pi nx)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(4\pi nx) dx = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin(4\pi nx)}{4\pi n} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(4\pi n) - \sin(0)}{4\pi n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0 - 0}{4\pi n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donde en (*) se ha usado la identidad trigonométrica $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$, y en (**) se ha usado la identidad trigonométrica $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$. Ahora, tenemos que

$$\|T\| = \sup_n \frac{\|T(u_n)\|}{\|u_n\|} = \sup_n \frac{2\pi n \sqrt{1/2}}{\sqrt{1/2}} = 2\pi n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

es decir, T es no acotado.

Para el caso de varias dimensiones $n > 1$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto acotado, el operador

$$\begin{aligned} T : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \end{aligned}$$

hereda la falta de acotación del operador derivativo unidimensional.

6. Convergencia débil

Definición 6.1. Sea X un espacio normado y $\{x_n\} \subseteq X$. Se dice que x_n **converge débilmente** a $x \in X$ si

$$F(x_n) \longrightarrow F(x) \quad \forall F \in X^*$$

y escribiremos $x_n \rightharpoonup x$.

Observación. Llamaremos **convergencia fuerte** a la convergencia habitual, es decir, $x_n \longrightarrow x$ si $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

Proposición 6.1. El límite débil es único.

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x_n \rightharpoonup x$ y $x_n \rightharpoonup y$. Entonces $F(x_n) \longrightarrow F(x) = F(y) \quad \forall F \in X^*$ de lo cual:

$$F(x - y) = 0 \quad \forall F \in X^* \implies \|x - y\| \stackrel{(*)}{=} \sup_{\|F\|=1, F \in X^*} |F(x - y)| = 0 \implies x = y.$$

donde en (*) hemos usado el Corolario 3.3.3 del teorema de Hahn-Banach. □

Proposición 6.2. Si $x_n \longrightarrow x$ en X (convergencia fuerte), entonces $x_n \rightharpoonup x$ (convergencia débil).

Demostración. Sea $F \in X^*$, entonces:

$$\|F(x_n) - F(x)\| \leq \|F\| \cdot \underbrace{\|x_n - x\|}_{\rightarrow 0} \longrightarrow 0$$

De lo cual $F(x_n) \longrightarrow F(x) \quad \forall F \in X^*$. □

Observación. El recíproco es falso en general, es decir, $x_n \rightharpoonup x$ no implica $x_n \longrightarrow x$. De hecho, si $X = l_2$ y e_n es la sucesión canónica de l_2 , entonces $e_n \rightharpoonup 0$ pero $\|e_n\| = 1 \not\rightarrow 0$.

Proposición 6.3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente débilmente a $x \in X$. Entonces $\{x_n\}$ es acotada y se cumple

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$$

Demostración. Sea $J : X \rightarrow X^{**}$ el mapa canónico ($x \mapsto J_x$), entonces si $x_n \rightharpoonup x$ tenemos que $F(x_n) \rightarrow F(x) \quad \forall F \in X^*$, es decir, $J_{x_n} \rightarrow J_x$ en X^{**} es puntualmente convergente $\xrightarrow{PUL} (J_{x_n})$ es uniformemente acotada: $\exists M > 0$:

$$\|J_{x_n}\| \leq M \quad \forall n \implies \|x_n\| \leq M \quad \forall n \implies \{x_n\} \text{ es acotada, de lo cual:}$$

$\forall F \in X^* \quad |F(x_n)| \leq \|F\| \cdot \|x_n\|$. Tomamos $\|F\| \leq 1$ entonces $|F(x_n)| \leq \|x_n\|$ para todo n , por lo que $|F(x)| = |\lim_n F(x_n)| = |\liminf_n F(x_n)| \leq \liminf_n \|x_n\|$ para todo F con $\|F\| \leq 1$.

$$\sup_{\|F\| \leq 1} |F(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| \implies \|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| \quad \square$$

□

Definición 6.2. Sea $C \subseteq X$ se dice **débilmente cerrado** (por sucesiones) si para toda $\{x_n\} \subseteq C$ convergente débilmente a $x \in X$, entonces $x \in C$.

Definición 6.3. Sea $K \subseteq X$ se dice **débilmente compacto** (por sucesiones) o **débilmente secuencialmente compacto** si para toda $\{x_n\} \subseteq K$ existe una subsucesión convergente débilmente en K .

Observación. La **envolvente convexa** (o convex hull) de un conjunto de puntos $\{x_n\}$ es el conjunto más pequeño que contiene a todos esos puntos y que además es convexo.

Teorema 6.4 (Mazur). Sea $\{x_n\} \subseteq X$ tal que $x_n \rightharpoonup x_0$, entonces $x_0 \in \overline{Co(x_n)}$, donde:

$$Co(x_n) := \text{envolvente convexa de } \{x_n\}$$

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo (P.A.) que $x_0 \notin \overline{Co(x_n)}$: $d(x_0, Co) = \delta > 0$, entonces $B_\delta(x_0) \cap \overline{Co(x_n)} = \emptyset$ y, por lo tanto, por el teorema de Hahn-Banach geométrico:

$$\exists F \in X^*, \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } F(x_0) < \alpha < F(x_n) \quad \forall n$$

pero $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$, lo cual es un ABSURDO. □

Corolario 6.4.1. Sea $C \subseteq X$ cerrado y convexo; entonces es débilmente cerrado.

Demostración. Por el teorema anterior, dada $\{x_m\} \subseteq C$ tal que $x_m \rightharpoonup x$, entonces $x \in \overline{Co(x_m)} \subseteq C \implies$ es débilmente cerrado. □

Observación. Sea X de dimensión finita, entonces la convergencia débil implica la convergencia fuerte.

Definición 6.4. Sean X, Y espacios normados de Banach, T se dice **débilmente secuencialmente continuo** si para cada $\{x_n\} : x_n \rightharpoonup x$, entonces $T(x_n) \rightarrow T(x)$.

Proposición 6.5. Sea $T : X \rightarrow Y$ lineal, entonces

$$T \text{ es débilmente secuencialmente continuo} \iff T \text{ es continuo}$$

Demostración. $\implies$) T es débilmente continuo, entonces si $x_m \rightharpoonup x$ se tiene que $T(x_m) \rightharpoonup y$ con $T(x) = y$ por la unicidad del límite.

Si T es débilmente continuo, entonces T es cerrada; de hecho: Si $x_m \rightarrow x$ y

$$T(x_m) \rightarrow y, \text{ entonces } \begin{cases} x_m \rightarrow x \\ T(x_m) \rightarrow y \end{cases} \implies T(x) = y.$$

Por el teorema del **gráfico cerrado**, T es continua.

$\Leftarrow$) Sea $\{x_m\} \in X : x_m \rightharpoonup x$, sea $G \in Y^*$, entonces: $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{G} \mathbb{R}$ con T, G continuas $\implies G \circ T$ continua.

$$\therefore G \circ T \in X^* \text{ y por lo tanto } (G \circ T)(x_m) \longrightarrow (G \circ T)(x) \quad \forall G \in Y^* \implies T(x_m) \rightharpoonup T(x)$$

□

Ejercicio 1. Sea $\{F_n\} \subseteq X^*$ tal que $F_n \rightarrow F$ en X^* y supongamos que existe $\{x_n\} : x_n \rightharpoonup x$, entonces $F_n(x_n) \rightarrow F(x)$.

Véamoslo

$$\|F_n(x_n) - F(x)\| \leq \|F_n(x_n) - F_n(x)\| + \|F_n(x) - F(x)\| \leq \|F_n - F\| \cdot \underbrace{\|x_n\|}_{\text{acotada}} + \underbrace{|F_n(x) - F(x)|}_{\rightarrow 0} \longrightarrow 0$$

Teorema 6.6 (Eberlein). Si X es un espacio reflexivo, entonces toda sucesión acotada admite una subsucesión débilmente convergente. (Los conjuntos acotados son débilmente secuencialmente compactos).

Demostración. Sea $\{x_m\} \subseteq X$ y sea $Y = \overline{\text{span}(\{x_m\})}$ el subespacio de X separable por construcción y reflexivo por ser cerrado. Como Y es reflexivo, tenemos que la inyección canónica

$$\begin{aligned} J : Y &\longrightarrow Y^{**} \\ y &\longmapsto J_y \end{aligned}$$

es un isomorfismo, por lo que Y^{**} es reflexivo y aplicando el Teorema 3.4 se tiene que Y^* es separable, por lo que existe una sucesión $\{F_n\}$ densa en Y^* .

Sea una sucesión $\{x_n\}$ acotada en Y , es decir, $\exists M > 0 : \|x_n\| \leq M$ para todo n . Como $\{F_1(x_n)\}_n$ es acotada en $\mathbb{R}$, ya que $F_1 \in Y^*$ y por tanto es lineal y acotada, entonces

$$|F_1(x_n)| \leq \|F_1\| \cdot \|x_n\| \leq M \cdot \|F_1\| \quad \forall n$$

y por tanto admite una subsucesión convergente en $\mathbb{R}$ que es $\{F_1(x_n^1)_n\}$. Iterando obtenemos que

$$\{F_2(x_n^1)\}_n \text{ es acotada en } \mathbb{R} \implies \exists \{F_2(x_n^2)\}_n \text{ subsucesión convergente en } \mathbb{R}$$

y si seguimos iterando obtenemos

$\{x_m^1\}, \{x_m^2\}, \dots, \{x_m^k\}, \dots$ sucesiones en X tales que $\{F_i(x_m^j)\}$ es convergente en $\mathbb{R}$ para $i \leq j$

donde lo que hemos utilizado por ejemplo para $i = 1$ y $j = 2$, es que $\{F_1(x_n^1)\}_n$ es convergente y $\{F_1(x_n^2)\}_n$ es una subsucesión de $\{F_1(x_n^1)\}_n$ por ser (x_n^2) subsucesión de $(x_n^1)_n$, por lo que $\{F_1(x_n^2)\}_n$ es convergente al mismo límite.

De esta forma tenemos que en general, la subsucesión del nivel j , llamada $\{x_n^j\}$, tiene la propiedad de que hace converger a todos los funcionales anteriores $\{F_1, F_2, \dots, F_j\}$. Veámos ahora que $\{F_i(x_k^k)\}_k$ es convergente en $\mathbb{R} \quad \forall i \geq 1$, analicemos los términos de la diagonal a partir del índice $k = i$, puesto que para los términos anteriores a i no se tiene la propiedad de convergencia, pero da igual pues no afectan al límite.

- El término x_i^i pertenece a la subsucesión del nivel i .
- El término x_{i+1}^{i+1} pertenece a la subsucesión del nivel $i + 1$, la cual es una subsucesión de la del nivel i .
- En general para todo $k \geq i$, el término x_k^k es un elemento que pertenece a la subsucesión del nivel i , por lo que $\{F_i(x_n^k)\}_n$ es convergente, de hecho, $\{F_i(x_k^k)\}_k$ es convergente.

Como $\{F_i\}_i$ es denso en Y^* , entonces $\{F(x_k^k)\}_k$ es convergente $\forall F \in Y^*$, veámoslo

$$\begin{aligned} |F(x_k^k) - F(x_j^j)| &\leq |F(x_k^k) - F_i(x_k^k)| + |F_i(x_k^k) - F_i(x_j^j)| + |F_i(x_j^j) - F(x_j^j)| \leq \\ &\leq \underbrace{\|F - F_i\|}_{\leq \varepsilon} \cdot \underbrace{\|x_k^k\|}_{\leq M} + |F_i(x_k^k) - F_i(x_j^j)| + \underbrace{\|F - F_i\|}_{\leq \varepsilon} \cdot \underbrace{\|x_j^j\|}_{\leq M} \leq 2\varepsilon M + |F_i(x_k^k) - F_i(x_j^j)| \end{aligned}$$

Fijado $\varepsilon > 0$, sea $\|F - F_i\| < \varepsilon$ y $\exists M > 0 : \|x_k^k\| \leq M$, entonces como $(F_i(x_k^k))$ es convergente, tenemos que $(F_i(x_k^k))$ es de Cauchy, por lo que $|F_i(x_k^k) - F_i(x_j^j)| < \varepsilon$, de lo cual

$$|F(x_k^k) - F(x_j^j)| \leq 2\varepsilon M + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Por lo tanto $\{F(x_k^k)\}_k$ es convergente; demostremos que converge a $F(x_0)$.

Sea $J : Y \rightarrow Y^{**}$ y $(J_{x_k^k})_k \in Y^{**} : J_{x_k^k}(F) = F(x_k^k) \quad \forall F \in Y^*$. $J_{x_k^k}(F)$ es puntualmente convergente a un funcional $G(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} J_{x_k^k}(F)$. Por un corolario del teorema de Banach-Steinhaus, $G \in Y^{**}$ (funcional lineal y acotado) y puesto que X es reflexivo, $\exists x_0 \in Y : G = J_{x_0}$, entonces

$$J_{x_k^k}(F) = F(x_k^k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} G(F) = J_{x_0}(F) = F(x_0) \implies x_k^k \rightharpoonup x_0$$

□

Corolario 6.6.1. Sea C cerrado, convexo y acotado en X , un espacio de Banach reflexivo. Entonces C es débilmente secuencialmente compacto.

Demostración. Sea C acotado, entonces si $\{x_m\} \subseteq C$, entonces $\exists x_0 \in X : x_m \rightharpoonup x_0 \in \overline{Co(C)} = C$ y por lo tanto se sigue el resultado. □

Observación. También vale el recíproco (difícil), es decir, si C es débilmente secuencialmente compacto, entonces C es acotado.

Corolario 6.6.2. Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea C cerrado no vacío y convexo; entonces C admite un punto de norma mínima.

Demostración. Sea $d := \inf_{x \in C} \|x\|$ y sea $\{x_m\} \in X$ tal que $\|x_m\| \rightarrow d$, entonces $\{x_m\}$ es acotada y, por lo tanto, $\exists \{x_{m_k}\}$:

$x_{m_k} \rightharpoonup x_0 \in C$ (por ser C cerrado y convexo). De lo cual:

$$\|x_0\| \leq \liminf_k \|x_{m_k}\| = d, \text{ pero } d = \inf_{x \in C} \|x\|, \text{ por lo que } \|x_0\| = d. \quad \square$$

Corolario 6.6.3. Sea C cerrado y convexo no vacío, entonces

$$\forall x \in X \quad \exists y \in C : \|x - y\| = \min_{z \in C} \|x - z\| = d(x, C)$$

Ejemplo. $x_m \rightharpoonup x$ en ℓ_p con $1 < p < \infty \iff \{x_m\}$ es acotada y $x_m^j \rightarrow x^j \quad \forall j \geq 1$

$\implies$) Sea $F \in \ell_p^* \cong \ell_q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces:

$$F(y) = y^j \implies F(x_m) = x_m^j \rightarrow x^j = F(x)$$

$\Leftarrow$) ...

Observación. En ℓ_1 no vale, pues tomando $\{e_n\} \subseteq \ell_1$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$, sabemos que (e_n) está acotada, entonces $e_n^j \rightarrow 0$ para todo j , pero $e_n \not\rightarrow 0$. De hecho,

$\ell_1^* \cong \ell_\infty$ y sea $y = (1, 1, \dots, 1) \in \ell_\infty$: $F_y(e_m) = \sum_j e_m^j y_j = \sum_{j=1}^\infty e_m^j = 1 \not\rightarrow 0$.

Ejemplo. $f_m \rightharpoonup f$ en $L^p \iff \int f_m g \rightarrow \int f g \quad \forall g \in L^q$ por el teorema de Riesz.

Ejemplo. $C^0([0, 1])$: sea $\{x_m\} \in C^0([0, 1])$, entonces: $x_m \rightharpoonup x \iff \begin{cases} \{x_m\} \text{ es acotada en } \|\cdot\|_\infty \\ x_m(t) \rightarrow x(t) \quad \forall t \in [0, 1] \end{cases}$

$\Rightarrow$ Sea $F_t \in C^0([0, 1])^*$ tal que $F_t(x) = x(t)$, entonces: $x_m \rightharpoonup x \Rightarrow F_t(x_m) \rightarrow F_t(x) \iff x_m(t) \rightarrow x(t)$

$\Leftarrow$ Sea $F \in C^0([0, 1])^*$, entonces F se representa con funciones de variación acotada g :

$F(x) = \int_0^1 x(t) dg$ con $\{x_m\}$ acotada en $\|\cdot\|_\infty$, por lo que $\exists M > 0 : \|x_m\| \leq M$ y $x_m(t) \rightarrow x(t)$.

$$F_g(x_m) = \int_0^1 x_m(t) dg \xrightarrow{TCD} \int_0^1 x(t) dg = F_g(x) \Rightarrow x_m \rightharpoonup x$$

6.1. Convergencia *-débil

Sea X un espacio normado y sean $\{f_n\} \in X^*$, estudiamos la convergencia débil en X^*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ en } X^* \text{ si } G(f_n) \rightarrow G(f) \quad \forall G \in X^{**}$$

donde $J : X \rightarrow X^{**}$, $J_x(f) = f(x)$ no es sobreyectiva en general y $J(X) \subseteq X^{**}$.

Definición 6.5. Sea $\{f_n\} \subseteq X^*$, diremos que f_n **converge *-débilmente** a $f \in X^*$ si

$$J_x(f_n) \longrightarrow J_x(f) \quad \forall x \in X$$

es decir, $f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x \in X$. Se nota como

$$f_n \xrightarrow{*} f \text{ en } X^*$$

Observación. El límite *-débil de $\{f_n\}$ es único, pues si $f_n \xrightarrow{*} f_1$ y $f_n \xrightarrow{*} f_2$, entonces $f_n(x) \longrightarrow f_1(x)$ y $f_n(x) \longrightarrow f_2(x)$ puntualmente para todo $x \in X$, por lo que $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in X$.

Observación. Si $f_n \longrightarrow f$ en X^* (convergencia fuerte), entonces $f_n \rightharpoonup f$ en X^* (convergencia débil), entonces $f_n \xrightarrow{*} f$ en X^* .

Proposición 6.7. La convergencia fuerte implica la convergencia débil, y esta última implica la convergencia *-débil.

Ejemplo. $l_0 \subseteq \ell_\infty$ con $c_0 = \{(x_m) \in \ell_\infty \mid x_m \rightarrow 0\}$ y sea $F_n(x) = x_n$, entonces:

$$F_n \xrightarrow{w^*} 0 \text{ porque } F_n(x) = x_n \longrightarrow 0.$$

$l_0^* \cong \ell_1 \implies \{F_n\}$ se representa con $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \in \ell_1$. Veamos que $F_n \not\rightharpoonup 0$ en l_0^* :

sea $G_y \in l_0^{**} = \ell_\infty$ con $y = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \in \ell_\infty$, entonces:

$$G_y(F_n) = F_n(y) = 1 \xrightarrow{\forall n, n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$$

Por lo tanto, si X no es reflexivo, la convergencia *-débil y la débil en X^* son diferentes.

Observación. Si X reflexivo, entonces

$$f_n \rightharpoonup f \text{ en } X^* \iff f_n \xrightarrow{*} f \text{ en } X^*$$

Si X no es reflexivo, entonces la convergencia débil y la convergencia *-débil en X^* son diferentes.

Ejercicio 6.1.1. Sea X un espacio de Banach y $\{F_n\} \subseteq X^*$ demostrar que

$$\text{i) } F_n \xrightarrow{*} F \implies (\|F_n\|)_n \text{ es acotada y } \|F\| \leq \liminf_n \|F_n\|$$

$$\text{ii) } F_n \xrightarrow{*} F, x_n \rightarrow x \implies F_n(x_n) \rightarrow F(x)$$

i). $F_m \xrightarrow{w^*} F \implies J_{F_m}(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} J_F(x) \quad \forall x \in X$, por lo tanto $F_m(x) \rightarrow F(x) \quad \forall x \in X$. Por el **PUL** (Principio de Uniforme Limitación), $\{F_m\}$ es acotada $\implies \|F_m\| \leq M$.

Además: $|F_m(x)| \leq \|F_m\| \cdot \|x\| \quad \forall m, \forall x \in X \implies$ aplicamos el $\liminf$:

$\liminf_m |F_m(x)| \leq \liminf_m \|F_m\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \implies$ aplicamos el $\sup_{\|x\|=1}$ con $\liminf_m |F_m(x)| = |F(x)|$:

$$\sup_{\|x\|=1} |F(x)| \leq \liminf_m \|F_m\| \implies \|F\| \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \|F_m\|$$

$$\text{ii). } |F_m(x_m) - F(x)| \leq |F_m(x_m) - F_m(x)| + |F_m(x) - F(x)| \leq \|F_m\| \cdot \|x_m - x\| \leq M \cdot \|x_m - x\| \longrightarrow 0$$

(Donde se usa que $F_m \xrightarrow{w^*} F$ para el segundo término y que $\{F_m\}$ es acotada por M).

Observación. $F_m \xrightarrow{*} F$ no implica $F \in \overline{Co(F_m)}$.

Ejercicio 6.1.2. Sea X un espacio de Banach y sea Y denso en X . Sea $\{F_n\} \subseteq X^*$, entonces

$$F_n \xrightarrow{*} F \iff \begin{cases} \{F_n\} \text{ es acotada en } X^* \\ \{F_n(y)\} \text{ es convergente } \forall y \in Y \end{cases}$$

$\implies$ Ya lo sabemos (por el Principio de Uniforme Limitación).

$\Longleftarrow$ $F_n \xrightarrow{*} F$ si $F_n(x) \longrightarrow F(x) \quad \forall x \in X$. Sea $x \in X$ fijado, entonces $\exists y \in Y : \|y - x\|_X < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x) - F_n(y)| + \underbrace{|F_n(y) - F(y)|}_{\rightarrow 0} + |F(y) - F(x)|$$

como $\|F_n\| \leq M$, entonces:

$$\leq M\|x - y\| + \|F\| \cdot \|y - x\| \leq (M + \|F\|)\varepsilon \longrightarrow 0$$

Teorema 6.8. Sea X un espacio de Banach separable. Toda sucesión de funcionales $\{f_n\} \subseteq X^*$ acotada en X^* admite una subsucesión $*$ -débilmente convergente.

Demostración. Sea $X = \{x_n\}$ una sucesión densa en X y sea $\{f_m\} \subseteq X^* : \|f_m\| \leq M \quad \forall m$. Entonces: $\{f_m(x_1)\}$ es acotada en $\mathbb{R}$, de hecho: $\|f_m(x_1)\| \leq \|f_m\| \cdot \|x_1\| \leq M \cdot \|x_1\|$, de lo cual:

$\exists \{f_m^{(1)}(x_1)\} \subseteq \mathbb{R}$ convergente. Análogamente, $\{f_m^{(1)}(x_2)\} \subseteq \mathbb{R}$ es acotada: $\|f_m^{(1)}(x_2)\| \leq M \cdot \|x_2\| \implies \exists \{f_m^{(2)}(x_2)\}$ convergente en $\mathbb{R}$. Iterando:

existe $\{f_n^{(k)}(x_k)\}$ sucesión convergente subsucesión de $(f_n^{(k-1)}(x_k))$.

Sea $\{f_k^{(k)}\}_k$ la sucesión que tiene la propiedad: $\{f_k^{(k)}(x_j)\}$ converge para cada $j \geq 1$. Puesto que $\{x_j\}$ es denso en X , se sigue que $\{f_k^{(k)}(x)\}$ converge $\forall x \in X$, de hecho: $\forall j \geq 1$

$$\begin{aligned} |f_k^k(x) - f_m^m(x)| &\leq |f_k^k(x) - f_k^k(x_j)| + |f_k^k(x_j) - f_m^m(x_j)| + |f_m^m(x_j) - f_m^m(x)| \leq \\ &\leq \|f_k^k\| \cdot \|x - x_j\| + |f_k^k(x_j) - f_m^m(x_j)| + \|f_m^m\| \cdot \|x - x_j\| \leq 2M\varepsilon + \varepsilon \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$\implies \{f_k^k(x)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R} \implies$ es convergente a $f(x) : f_k^k(x) \longrightarrow f(x)$ con $f(x)$ lineal y acotado por PUL. $\square$

$\square$

Observación. Si X no es separable, en general no vale.

Ejemplo. Sea $X = l_\infty$ no es separable, veámos que no se cumple entonces.
 $\{f_m\} \in \ell_\infty^* \quad f_m(x) = x_m \text{ con } x \in \ell_\infty \implies \|f_m\| = 1$ es acotada pero no tiene subsucesiones que converjan débilmente. De hecho, si $\{f_{m_j}\}$ es una subsucesión, tomamos

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_k), \quad \tilde{x}_k = \begin{cases} 1 & k = m_j \text{ par} \\ 0 & k = m_j \text{ impar} \end{cases}$$

entonces $f_{m_j}(\tilde{x}) = \tilde{x}_{m_j}$ no es convergente.

Teorema 6.9 (Teorema de Banach-Alaoglu). *Sea X un espacio de Banach, entonces B^* , la bola cerrada en X^* , es débilmente- $*$ compacta.*

Observación. En un espacio de Hilbert (lo veremos más adelante), la convergencia débil y la convergencia débil- $*$ son exactamente la misma cosa, pues $\mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}$.

Corolario 6.9.1. *Si H es un espacio de Hilbert, la bola cerrada $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ es débilmente compacta. Por tanto, de cualquier sucesión acotada en H se puede extraer una subsucesión débilmente convergente.*

6.2. Espacios uniformemente convexos

Definición 6.6. Un espacio normado X se dice **estrictamente convexo** si

$$\forall x, y \in X \text{ con } x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1 \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

(el punto medio de 2 vectores unitarios cae dentro de la bola)

Ejemplo. $\ell_p, p > 1$ es estrictamente convexo, veámoslo

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|_{\ell_p} < \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \quad \forall x, y \in \ell_p \text{ con } x \neq \alpha y$$

(desigualdad estricta)

Observación. Veámos algunos ejemplos

- $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es estrictamente convexo.
- $(\mathbb{R}^n, d_1)$ no es estrictamente convexo:

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| = \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|y\| = 1 \text{ con } \|x\| = \|y\| = 1$$

Ejercicio 6.2.1. $\ell_1, \ell_\infty, C^0([0, 1]), L^1(A)$ no son estrictamente convexos.

Definición 6.7. Un espacio normado X se dice **uniformemente convexo** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|x\|, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

(el punto medio de 2 vectores unitarios que están al menos ε de distancia cae dentro de la bola cerrada de radio $1 - \delta$)

Lema 6.10. Sea X un espacio de Banach, entonces

$$X \text{ es reflexivo} \iff \forall F \in X^* \quad \exists x_0 \in X : \|x_0\| = 1 \text{ y } \|F\| = |F(x_0)|$$

Demostración. $\implies$) Ok.

$\impliedby$) Difícil, demostrado en 1970.

□

Teorema 6.11 (Teorema de Milman-Pettis). Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, entonces X es reflexivo.

Demostración. Sea $F \in X^* : \|F\| = 1$ sabemos que $\exists \{x_m\} \subseteq X$ con $\|x_m\| = 1$, simplemente se trata de construir la sucesión con los x_m que hacen que $F(x_m)$ se acerque a $\|F\|$. De hecho, como $\|F\| = 1$, entonces

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)| \geq |F(x_m)| \quad \forall m \implies \lim_{m \rightarrow +\infty} |F(x_m) - 1| \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \sup_{\|x\|=1} |F(x)| - 1 \right| = \lim_{m \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

por lo que $F(x_m) \rightarrow 1 = \|F\|$. Demostremos que $\{x_m\}$ es de Cauchy, usando la reducción al absurdo, es decir, supongamos que no es de Cauchy, entonces

$$\exists \bar{\varepsilon} > 0 : \forall k > 0, \exists m_k, n_k : \|x_{m_k} - x_{n_k}\| > \bar{\varepsilon}$$

Por la convexidad uniforme

$$\exists \delta > 0 : \left\| \frac{1}{2}(x_{m_k} + x_{n_k}) \right\| \leq 1 - \delta < 1 \implies |F(\frac{1}{2}(x_{m_k} + x_{n_k}))| \leq \|F\| \cdot \left\| \frac{1}{2}(x_{m_k} + x_{n_k}) \right\| \leq 1 - \delta < 1$$

lo cual es un absurdo, pues $\|F\| = 1$, de hecho tenemos que

$$F(x_m) \rightarrow \|F\| = 1 \implies \frac{1}{2}(F(x_{m_k}) + F(x_{n_k})) \rightarrow 1$$

Demostrado queda entonces que $\{x_m\}$ es de Cauchy, y como X es de Banach (completo), entonces $\{x_m\}$ converge a $\tilde{x} \in X$, con $\|\tilde{x}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m\| = 1$ y $F(x_m) \rightarrow F(\tilde{x}) = 1$. Por lo tanto, F alcanza su norma $\|F\| = 1$.

Es claro que aquí no hemos usado un $F \in X^*$ cualquiera, sino uno con $\|F\| = 1$, pero si F es un funcional cualquiera, tenemos estos dos casos extras

- $F = 0$, entonces F alcanza su norma en cualquier $x_0 \in X$ con $\|x_0\| = 1$.
- $F \neq 0$ y $\|F\| \neq 0$, entonces definimos

$$G = \frac{F}{\|F\|}$$

un funcional con norma 1. Como nuestra demostración de Milman-Pettis funciona para cualquier funcional de norma 1, sabemos que existe un $\tilde{x} \in X$ con $\|\tilde{x}\| = 1$ tal que $|G(\tilde{x})| = 1$.

Ahora, simplemente “deshacemos” la división. Si $|G(\tilde{x})| = 1$, entonces:

$$\left| \frac{F(\tilde{x})}{\|F\|} \right| = 1 \implies |F(\tilde{x})| = \|F\|$$

Y claramente aplicando el lema anterior, X es reflexivo.

□

6.3. Topologías débiles

Sea X un conjunto y sea $\{Y_i\}$ una familia de espacios topológicos tales que existen funciones $\varphi_i : X \rightarrow Y_i$ para todo i .

Queremos dotar a X de una topología $\mathcal{T}$ que haga continuas a las $\{\varphi_i\}$ y que sea la menos fina (más pequeña) con esta propiedad. Es decir

$$\forall W_i \subseteq Y_i \text{ abierto, } \varphi_i^{-1}(W_i) \text{ es abierto en } (X, \mathcal{T}) \text{ para todo } i$$

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X tal que la intersección finita $\bigcap_{\text{finitas}} \varphi_i^{-1}(W_i)$ está contenida en X y contiene la unión arbitraria $\bigcup \varphi_i^{-1}(W_i)$.

Después de haber realizado estas dos operaciones obtenemos que $\mathcal{F}$ es estable por intersecciones finitas y uniones, y contiene a $\varphi_i^{-1}(W_i)$ para todo W_i abierto en Y_i y para todo i ; por construcción, es la topología más pequeña con estas propiedades. Definimos entonces $\mathcal{T} = \mathcal{F}$.

Proposición 6.12. Sea $x_0 \in X$ y sea $\{\bigcap_{\text{finitas}} \varphi_i^{-1}(V_i)\}$ una base de entornos de x_0 , donde cada V_i es un entorno de $\varphi_i(x_0)$ en Y_i para todo i . Entonces

$$x_n \rightarrow x \text{ en } (X, \mathcal{T}) \iff \varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x) \text{ en } Y_i \quad \forall i$$

Demostración. $\implies$) Si $x_n \rightarrow x$, por la definición de $\mathcal{T}$, φ_i es continua y por lo tanto $\varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x)$.

$\impliedby$) Sea $\mathcal{I}(x)$ un entorno de $x \in (X, \mathcal{T})$, entonces $\mathcal{I}(x) = \bigcap_{\text{finitas}} \varphi_i^{-1}(V_i)$ con V_i entorno de $\varphi_i(x)$. Por hipótesis $\varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x)$, por lo que $\varphi_i(x_n) \in V_i$ para todo $n > \nu_i$ para algún $\nu_i > 0$. Sea $\nu = \max_i \{\nu_i\} < +\infty$, entonces para todo $n > \nu$ se tiene que $\varphi_i(x_n) \in V_i$ para todo i y, por lo tanto, $x_n \in \varphi_i^{-1}(V_i)$ para todo i .

Esto implica que $x_n \in \bigcap_i \varphi_i^{-1}(V_i) = \mathcal{I}(x) \implies x_n \rightarrow x$. □

Definición 6.8. Sea X un espacio normado y $\mathcal{T}$ la topología menos fina que hace continuas las aplicaciones $F \in X^*$. Definimos $\mathcal{T}$ como la **topología débil**. (Es el caso precedente con $Y_i = \mathbb{R} \forall i$)

Observación. $(X, \|\cdot\|)$ hace continuas las aplicaciones de X^* y, por lo tanto, también las de $(X, \mathcal{T})$.

$$x_m \xrightarrow{\mathcal{T}} x \text{ en } (X, \mathcal{T}) \iff F(x_m) \longrightarrow F(x) \text{ en } \mathbb{R} \forall F \in X^* \iff x_m \rightharpoonup x$$

Observación. Sea $x_0 \in X$, una base de entornos se obtiene como

$$V_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \forall F \text{ en un subconjunto finito de } X^*\}$$

Proposición 6.13. $(X, \mathcal{T})$ satisface el axioma de separación T_2 (Hausdorff).

Demostración. Hahn-Banach geométrico sobre los funcionales. □

Observación. En dimensión finita, la topología fuerte y la topología débil coinciden.

Observación. Cuando hacemos alusión a la topología fuerte en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, nos referimos a la topología inducida por la norma $\|\cdot\|$ y, por lo tanto, a la convergencia fuerte. Por otro lado, cuando hablamos de la topología débil en $(X, \mathcal{T})$, nos referimos a la topología menos fina que hace continuas a las aplicaciones de X^* y, por lo tanto, a la convergencia débil.

Observación. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión infinita, entonces $(X, \mathcal{T})$ débil es siempre estrictamente menos fina (más pequeña) que $(X, \|\cdot\|)$ con topología fuerte. En particular

$$B = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$$

nunca es abierto en $(X, \mathcal{T})$, pues se puede ver que cada entorno de $x_0 \in (X, \mathcal{T})$ contiene una recta vectorial que pasa por x_0 , por lo tanto, B nunca es abierto.

Observación. En dimensión infinita, $(X, \|\cdot\|)$ nunca es metrizable. Existen espacios en los que la convergencia por sucesiones

$$x_m \rightarrow x \iff x_m \rightharpoonup x$$

pero no es metrizable.

Ejercicio 6.3.1. En ℓ_1 , la convergencia fuerte y la convergencia débil coinciden, es decir

$$x_m \rightarrow x \text{ en } \ell_1 \iff x_m \rightharpoonup x \text{ en } \ell_1$$

Intuitivamente, la topología débil tiene “menos abiertos” y, por lo tanto, “más compactos”, entonces podemos minimizar funcionales sobre los compactos.

7. Espacios de Hilbert

Definición 7.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se dice que X es un **espacio con producto interno** si existe una aplicación:

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y = (x, y) \end{aligned}$$

tal que:

- i) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in X$
- ii) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- iii) $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in X$
- iv) $(x, x) \geq 0$ y $(x, x) = 0 \iff x = 0 \quad \forall x \in X$

Sobre $\mathbb{C}$, la condición iii) se sustituye por iii)': $(x, y) = \overline{(y, x)}$ y por lo tanto:

$$(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ (producto sesquilineal)}$$

Destacar que la diferencia con el producto interno en $\mathbb{R}$ es que esta vez el producto interno es lineal en la primera variable y conjugado lineal en la segunda.

Observación. Las condiciones i) y ii) nos dicen que $(\cdot, \cdot)$ es lineal en la primera variable y, junto con iii), se tiene que $(\cdot, \cdot)$ es bilineal sobre $\mathbb{R}$.

Observación. $(X, (\cdot, \cdot))$ es un espacio normado con norma $\|x\| := (x, x)^{1/2}$.

Proposición 7.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea X un espacio con producto interno, entonces se cumple:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in X$$

Definición 7.2. Un espacio $(X, (\cdot, \cdot))$ con producto interno se dice **espacio de Hilbert** $\mathcal{H} = (X, (\cdot, \cdot))$ si es completo.

Ejemplo. ■ ℓ_2 es un espacio de Hilbert: $(x, y) := \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \cdot \bar{y}_k$

■ $L^2(A)$ es un espacio de Hilbert: $(f, g) := \int_A f \bar{g} d\mu$

Buscamos un criterio que nos permita entender cuándo un espacio normado tiene una norma que deriva de un producto interno.

Teorema 7.2 (Ley del paralelogramo). Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, entonces

X espacio con producto interno con $\|x\|^2 := (x, x) \iff \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$

Demostración. $\implies$) Sean $x, y \in X$, entonces:

$$\begin{cases} \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 \end{cases} \implies \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$\Leftarrow$) Supongamos que vale la ley del paralelogramo, definimos un producto interno

$$(x, y) := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad \forall x, y \in X$$

demostramos que $(\cdot, \cdot)$ es un producto interno

- **Simétrico:** $(y, x) = (x, y)$
- **Norma:** $\|x\| = (x, x)^{1/2} = \left(\frac{1}{4} \cdot 4\|x\|^2\right)^{1/2} = \|x\| \geq 0$
- **Linealidad en la primera componente:** Queremos demostrar primero la aditividad: $(x+z, y) = (x, y) + (z, y)$. Aplicando la definición del producto interno candidato, tenemos:

$$\begin{aligned} (x, y) + (z, y) &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{1}{4}(\|z+y\|^2 - \|z-y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}([\|x+y\|^2 + \|z+y\|^2] - [\|x-y\|^2 + \|z-y\|^2]) \quad (*) \end{aligned}$$

Por la ley del paralelogramo, sabemos que para cualesquiera dos vectores $a, b \in X$ se cumple que $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$, lo que equivale a:

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = \frac{1}{2}(\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2)$$

Aplicamos esta propiedad a los dos bloques de el término (*):

- Para el primer bloque, tomamos $a = x+y$ y $b = z+y$:

$$\|x+y\|^2 + \|z+y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+z+2y\|^2 + \|x-z\|^2)$$

- Para el segundo bloque, tomamos $a = x-y$ y $b = z-y$:

$$\|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+z-2y\|^2 + \|x-z\|^2)$$

Sustituyendo ambos bloques de nuevo en (*), el término común $\|x-z\|^2$ se cancela al restar, quedando:

$$\begin{aligned} (x, y) + (z, y) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(\|x+z+2y\|^2 - \|x+z-2y\|^2) \\ &= \frac{1}{8}(\|x+z+2y\|^2 - \|x+z-2y\|^2) \quad (**) \end{aligned}$$

Por otro lado, si aplicamos la ley del paralelogramo directamente a los vectores $a = x + z$ y $b = 2y$, obtenemos:

$$\|x + z + 2y\|^2 + \|x + z - 2y\|^2 = 2\|x + z\|^2 + 2\|2y\|^2 = 2\|x + z\|^2 + 8\|y\|^2$$

Y si evaluamos $(x + z, 2y)$ usando que por simetría y aditividad preliminar (haciendo $x = z$) se cumple que $(2x, y) = 2(x, y)$, la relación $(**)$ se reduce exactamente a:

$$\frac{1}{8} (\|x + z + 2y\|^2 - \|x + z - 2y\|^2) = 2 \left(\frac{1}{4} (\|x + z + y\|^2 - \|x + z - y\|^2) \right) = (x + z, y)$$

Por lo tanto, queda demostrada la aditividad: $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$.

■ **Homogeneidad:** Queremos demostrar que $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Por la aditividad que acabamos de probar, mediante inducción matemática es inmediato que $(nx, y) = n(x, y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se extiende fácilmente a los enteros $\mathbb{Z}$ usando que $(-x, y) = -(x, y)$ por la simetría de la norma.
- Para los números racionales $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, tenemos:

$$n \left(\frac{m}{n} x, y \right) = (mx, y) = m(x, y) \implies \left(\frac{m}{n} x, y \right) = \frac{m}{n} (x, y)$$

- Para un número real cualquiera $\alpha \in \mathbb{R}$, tomamos una sucesión de racionales $(q_k) \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $q_k \rightarrow \alpha$. Como la norma es una aplicación continua, el producto interno candidato $(\cdot, \cdot)$ también es continuo respecto a sus variables. Por lo tanto, pasando al límite:

$$(\alpha x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} (q_k x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} q_k (x, y) = \alpha (x, y)$$

Habiendo demostrado la simetría, la definición compatible de la norma y la linealidad completa, concluimos que $(\cdot, \cdot)$ es un producto interno genuino en X .

□

Ejercicio 1. ℓ_1 no tiene producto interno.

Sean $x = (x_m), y = (y_m) \in \ell_1, y \neq 0$, y donde $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que x_{k_0}, y_{k_0} tienen símbolos opuestos, entonces

$$\|x + y\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| < \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = \|x\| + \|y\|$$

donde la desigualdad estricta se debe a que x_{k_0} y y_{k_0} tienen símbolos opuestos, de lo cual

$$\|x + y\| + \|x - y\| < 2\|x\| + 2\|y\|$$

(Nota: Al no cumplirse la igualdad de la ley del paralelogramo, la norma no proviene de un producto interno).

Ejercicio 2. $(C[0, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ no tiene producto interno.

Proposición 7.3. $z = 0 \iff (x, z) = 0 \quad \forall x \in X$

Demostración. $\implies (x, z) = (x, 0) = (x, x - x) = (x, x) - (x, x) = 0 \quad \forall x \in X$

$\impliedby$ Si $(x, z) = 0$ para todo $x \in X$, entonces $(z, z) = 0$ y por lo tanto $z = 0$. □

Ejercicio 3. Sea $\{z_m\} \in X$ tal que $(z_m, x) \rightarrow (z, x)$ y $\|z_m\| \rightarrow \|z\|$, entonces $z_m \rightarrow z$ (fuerte).

Por hipótesis $(z_m, x) \rightarrow (z, x) \quad \forall x \in X \iff (z_m - z, x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in X$, entonces tomando $x = z$, tenemos que

$$(z_m, z) \rightarrow (z, z) = \|z\|^2 \text{ y } \|z_m\|^2 \rightarrow \|z\|^2$$

Además con el siguiente desarrollo

$$\|z_m - z\|^2 = (z_m - z, z_m - z) = \|z_m\|^2 - (z_m, z) - (z, z_m) + \|z\|^2$$

podemos concluir que

$$\lim \|z_m - z\|^2 = \|z\|^2 - \|z\|^2 - \|z\|^2 + \|z\|^2 = 0 \implies z_m \rightarrow z$$

Observación. Sea $\bar{x} \in X$ tal que $F_{\bar{x}}(y) = (\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$, entonces $F_{\bar{x}}$ es lineal y continuo, veámoslo

- La linealidad se hereda de la linealidad del producto interno.
- $|F_{\bar{x}}(y)| = |(\bar{x}, y)| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|y\| \implies \|F_{\bar{x}}\| \leq \|\bar{x}\|$, y entonces tomando $y = \bar{x}$, tenemos que

$$F_{\bar{x}}(y) = F_{\bar{x}}(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{x}) = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{x}\| \implies \|F_{\bar{x}}\| = \|\bar{x}\|$$

Teorema 7.4. Todo espacio con producto interno $(X, (\cdot, \cdot))$ es uniformemente convexo.

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x - y\| > \varepsilon$. Demostremos que $\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta$ para algún $\delta = \delta_\varepsilon$.

$$\frac{1}{4}\|x + y\|^2 = \frac{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}{4} - \frac{\|x - y\|^2}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\varepsilon^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} < 1$$

$$\text{Sea } \delta := \frac{\varepsilon^2}{4} \implies \|\frac{1}{2}(x + y)\|^2 = 1 - \delta, \quad \delta > 0. \quad \square$$

Ejercicio 4. Sea C un conjunto cerrado y convexo de $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, entonces demostrar que C admite un único punto de mínima distancia.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert $\implies \mathcal{H}$ es uniformemente convexo y, por lo tanto, $\mathcal{H}$ es un espacio reflexivo, de lo cual se sigue que existe un punto de norma mínima. Sean x_0, x_1 puntos de norma mínima, es decir, $\|x_0\| = \|x_1\| = d$. Supongamos por el contrario (P.A.) que $x_0 \neq x_1$.

Por la convexidad de C , el punto medio $\frac{x_0+x_1}{2} \in C$, por lo tanto su norma debe ser mayor o igual al ínfimo:

$$\left\| \frac{x_0 + x_1}{2} \right\| \geq d$$

Por otro lado, utilizando la **ley del paralelogramo**:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_0 + x_1}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{4} \|x_0 + x_1\|^2 = \frac{1}{4} (2\|x_0\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|x_0 - x_1\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \|x_0\|^2 + \frac{1}{2} \|x_1\|^2 - \frac{1}{4} \|x_0 - x_1\|^2 = d^2 - \frac{1}{4} \|x_0 - x_1\|^2 < d^2 \end{aligned}$$

puesto que hemos supuesto $x_0 \neq x_1 \implies \|x_0 - x_1\| > 0$.

Esto implica que $\left\| \frac{x_0+x_1}{2} \right\| < d$, lo cual es un ****ABSURDO****, de donde se concluye que $x_0 = x_1$.

Teorema 7.5 (Teorema de proyección). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y sea $C \subseteq \mathcal{H}$ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo, entonces para cada $x \in \mathcal{H}$ existe un único $x_0 \in C$ tal que:

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

Además, x_0 está caracterizado por la siguiente propiedad

$$x_0 \text{ es el único punto de } C \text{ tal que } (x - x_0, y - x_0) \leq 0 \quad \forall y \in C$$

El punto $x_0 \in X$ se denomina *proyección de x sobre C* y se indica como $P_C(x)$.

Demostración. $\mathcal{H}$ es espacio de Hilbert $\implies \mathcal{H}$ es reflexivo y C es cerrado y convexo, entonces $\exists! x_0 \in C$ que minimiza la distancia $\|x - y\|$. Mostremos la caracterización de x_0 .

$\implies$) Supongamos $x_0 \in C : \|x - x_0\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$ y sea $z \in \{(1-t)x_0 + ty \mid t \in [0, 1]\} \subseteq C$, entonces:

$$\|x - x_0\| \leq \|x - z\| = \|x - x_0 - t(y - x_0)\| \iff \|x - x_0\|^2 \leq \|x - x_0 - t(y - x_0)\|^2$$

de lo cual:

$$\|x - x_0\|^2 \leq \|x - x_0\|^2 + t^2 \|y - x_0\|^2 - 2t(x - x_0, y - x_0) \iff t\|y - x_0\|^2 - 2(x - x_0, y - x_0) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

haciendo $t \rightarrow 0$:

$$(x - x_0, y - x_0) \leq 0$$

$\Longleftrightarrow$) Sea $x_0 \in C$ el único punto tal que $(x - x_0, y - x_0) \leq 0 \quad \forall y \in C$, entonces:

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|^2 &= \|x - y + y - x_0\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - x_0\|^2 + 2(x - y, y - x_0) \leq \\ &\leq \|x - y\|^2 + 2 \underbrace{(x - x_0, y - x_0)}_{\leq 0} - \|y - x_0\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad \forall y \in C \end{aligned}$$

□

Ejercicio 5. La proyección P_C es Lipschitz de constante $L = 1$, es decir

$$\|P_C(z_1) - P_C(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{H}$$

7.1. Ortogonalidad en espacios de Hilbert

Definición 7.3. Sean $x, y \in \mathcal{H}$, se dice que x es **ortogonal** a y si $(x, y) = 0$, y escribiremos $x \perp y$.

Proposición 7.6. Si $x \perp y$, entonces se tiene

- i) $y \perp x$
- ii) $x \perp (-y)$
- iii) $x \perp x \iff x = 0$

Definición 7.4. Sean $A, B \subseteq \mathcal{H}$ subconjuntos. Se dice que $x \in \mathcal{H}$ es **ortogonal a A** ($x \perp A$) si

$$(x, a) = 0 \quad \forall a \in A$$

Se dice que A es **ortogonal a B** ($A \perp B$) si

$$(a, b) = 0 \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

El **conjunto ortogonal a A** se define como:

$$A^\perp := \{x \in \mathcal{H} \mid (x, a) = 0 \quad \forall a \in A\}$$

Proposición 7.7. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $0^\perp = \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$
2. $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$
3. (Teorema de Pitágoras) si $x \perp y$ entonces $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
4. Sean A, B subconjuntos con $A \subseteq B$ entonces $B^\perp \subseteq A^\perp$

Ejercicio 7.1.1. Sea $A \subseteq \mathcal{H}$ un subconjunto, entonces $A^\perp$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.

Proposición 7.8. Sea $x \in \mathcal{H}$ y sea $x_0 := P_M(x)$, donde $M \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, cerrado y convexo, entonces x_0 está caracterizado por estas dos condiciones

$$i) \ x_0 \in M$$

$$ii) \ (x - x_0, y) = 0 \quad \forall y \in M \quad (x - x_0 \in M^\perp).$$

es decir, $x_0 = P_M(x)$ si y solo si se cumplen i) y ii).

Además, la función P_M

$$\begin{aligned} P_M : \mathcal{H} &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto P_M(x) \end{aligned}$$

es un operador lineal y continuo, y se define como **proyección ortogonal sobre M** .

Demostración. $\implies$ $x_0 = P_M(x)$ y por lo tanto $(x - x_0, y - x_0) \leq 0 \quad \forall y \in M$. Al ser M un subespacio, entonces $y + x_0 \in M$ y por lo tanto se tiene:

$$(x - x_0, y + x_0 - x_0) \leq 0 \implies (x - x_0, y) \leq 0 \quad \forall y \in M$$

de lo cual:

$$\begin{aligned} (x - x_0, -y) \leq 0 &\iff -(x - x_0, y) \leq 0 \iff (x - x_0, y) \geq 0 \\ &\implies (x - x_0, y) = 0 \quad \forall y \in M \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Supongamos ciertas i), ii), entonces

$$(x - x_0, y) = 0 \quad \forall y \in M \text{ y } y - x_0 \in M \implies (x - x_0, y - x_0) = 0 \quad \forall y \in M$$

donde en la condición $y - x_0 \in M$ se ha utilizado que $x_0 \in M$. Teniendo el resultado anterior, se concluye que $x_0 = P_M(x)$, al usar la caracterización del Teorema de proyección.

Demostremos ahora que P_M es un operador lineal y continuo:

- **Linealidad:** Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, entonces $(x_1 - P_M(x_1), y) = 0$ y $(x_2 - P_M(x_2), y) = 0 \quad \forall y \in M$. Sumando:

$$(x_1 + x_2 - [P_M(x_1) + P_M(x_2)], y) = 0 \quad \forall y \in M \xrightarrow{\text{unicidad}} P_M(x_1 + x_2) = P_M(x_1) + P_M(x_2)$$

Analógamente:

$$\begin{aligned} (x_1 - P_M(x_1), y) = 0 &\implies \alpha(x_1 - P_M(x_1), y) = 0 \\ &\implies (\alpha x_1 - \alpha P_M(x_1), y) = 0 \\ &\implies \alpha P_M(x_1) = P_M(\alpha x_1) \end{aligned}$$

- **Continuidad:** se deduce de la propiedad de Lipschitz (con $L = 1$).

□

Definición 7.5. Sea X un espacio normado, X es la **suma directa** de dos subespacios A, B si

- A, B son cerrados.

- $A \cap B = \{0\}$
- $A + B = X$

y diremos $X = A \oplus B$.

Teorema 7.9 (Teorema de descomposición ortogonal). *Sea M un subespacio cerrado, entonces*

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$$

Demostración. $M^\perp$ es subespacio cerrado, por lo tanto sabemos que $0 \in M, M^\perp$, por lo que $M \cap M^\perp = \{0\}$, usando la Proposición 7.7. Mostremos que $M + M^\perp = \mathcal{H}$, veámoslo.

Sea $x \in \mathcal{H}$, entonces $P_M(x) =: x_0 \in M$ y por lo tanto $x = x_0 + (x - x_0)$. Como $(x - x_0, y) = 0 \quad \forall y \in M$, entonces $x - x_0 \in M^\perp$, y siendo $x_0 \in M$, se tiene:

$$x = \underbrace{x_0}_{\in M} + \underbrace{(x - x_0)}_{\in M^\perp}$$

Destacar que hemos usado la caracterización del Teorema de proyección donde la característica de M de ser convexo viene implícita al ser un subespacio. $\square$

Observación. Si $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$, la descomposición es única, veámoslo. Si $x = \underbrace{a}_{\in M} + \underbrace{b}_{\in M^\perp}$, entonces

$$x - a = b \in M^\perp \implies (x - a, y) = 0 \quad \forall y \in M \implies a = P_M(x) = x_0 \text{ y } b = x - x_0$$

tenemos por tanto que $a = x_0$ es único y $b = x - x_0$ también es único, por la noción de que la proyección de x , es decir, x_0 , es única.

Observación. Sea $A \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio, entonces se cumple:

- i) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$
- ii) $(A^\perp)^\perp = \overline{A}$. En particular si A es cerrado, entonces $A = (A^\perp)^\perp$

Ejercicio 7.1.2. Sea $M \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado, entonces:

- i) $(P_M(x), y) = (x, P_M(y)) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$
- ii) $P_M^2(x) = P_M(x) \quad \forall x \in \mathcal{H}$

Observación. Sea X un espacio con producto interno y sea

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow X^* \\ y &\longmapsto F_y \end{aligned}$$

donde $F_y(x) = (x, y) \quad \forall x \in X$. Entonces:

1. **T es inyectiva:** si $y_1 \neq y_2 \implies \exists x_0 \in X : (x_0, y_1) \neq (x_0, y_2)$. De lo contrario, si no existiera tal $x_0 \in X$:

$$(x, y_1) = (x, y_2) \quad \forall x \in X \iff (x, y_1 - y_2) = 0 \quad \forall x \in X$$

entonces tomando $x = y_1 - y_2 \in X$ se concluye que

$$(y_1 - y_2, y_1 - y_2) = 0 \implies y_1 - y_2 = 0 \implies y_1 = y_2$$

lo cual es un **ABSURDO**.

2. **T es isometría:** $\|F_y\| = \|y\|$, como ya se ha visto anteriormente, y como una isometría conserva las distancias, es decir, las normas, entonces T es isometría.

Teorema 7.10 (Teorema de Riesz). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces*

$$\forall F \in \mathcal{H}^* \quad \exists! y_F \in \mathcal{H} \text{ tal que } F(x) = (x, y_F) \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

es decir, T es sobreyectiva.

Demostración. Busquemos ese y_F de ese tipo. Sea

$$N_F := \text{Ker}(F) = \{x \in \mathcal{H} \mid F(x) = 0\}$$

es un subespacio cerrado (por ser F funcional continuo y $\text{Ker}(F) = F^{-1}(\{0\})$) y propio de $\mathcal{H}$ (de lo contrario, si $F \equiv 0$, entonces $y_F = 0$), por lo tanto

$$\mathcal{H} = N_F \oplus N_F^\perp$$

Sea $x_0 \in N_F^\perp \setminus \{0\}$ y sea $x \in \mathcal{H}$. Consideremos $x - \frac{F(x)}{F(x_0)}x_0 \in N_F$, donde es clave que $x_0 \in N_F^\perp$ y $F(x_0) \neq 0$ (por ser $x_0 \neq 0$ y $x_0 \in N_F^\perp$), entonces

$$F\left(x - \frac{F(x)}{F(x_0)}x_0\right) = F(x) - \frac{F(x)}{F(x_0)}F(x_0) = 0$$

por lo tanto

$$\left(\underbrace{\left(x - \frac{F(x)}{F(x_0)}x_0\right)}_{\in N_F}, \underbrace{x_0}_{\in N_F^\perp} \right) \stackrel{(*)}{=} 0 \implies (x, x_0) - \left(\frac{F(x)}{F(x_0)}x_0, x_0\right) = 0 \implies (x, x_0) = \frac{F(x)}{F(x_0)}\|x_0\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

donde en $(*)$ hemos usado que son perpendiculares al pertenecer a $N_F, N_F^\perp$. Tenemos a continuación

$$F(x) = \frac{F(x_0)}{\|x_0\|^2}(x, x_0)$$

y definiendo $y_F := \frac{\overline{F(x_0)}}{\|x_0\|^2}x_0$, tenemos que y_F representa a F y es único porque T es inyectiva. $\square$

Observación. Hemos visto que $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*$ es un isomorfismo algebraico y topológico (dijimos T isometría, que implica continuidad y de su inversa, y biyectiva), entonces $\mathcal{H}^*$ es un espacio de Hilbert, veámoslo $\forall F, G \in \mathcal{H}^*$

$$(F, G) := (y_F, y_G) = (T^{-1}(F), T^{-1}(G))$$

y $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^*}$ es la misma debido al producto escalar. Por lo tanto, se tiene: $\mathcal{H} \xrightarrow{T_{\mathcal{H}}} \mathcal{H}^* \xrightarrow{T_{\mathcal{H}^*}} \mathcal{H}^{**}$ con $T_{\mathcal{H}}, T_{\mathcal{H}^*}$ isomorfismos $\implies T_{\mathcal{H}^*} \circ T_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{**}$ es un isomorfismo y tal que $T_{\mathcal{H}^*} \circ T_{\mathcal{H}} = J : \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{**}$. Se sigue que $\mathcal{H}$ es reflexivo.

Ejemplo. $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \simeq L^2(\Omega)^* \hookrightarrow H_0^1(\Omega)^*$ atención al identificar

7.2. Operador adjunto

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $x \in \mathcal{H}$ fijo. Definimos

$$\begin{aligned} G_x : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} \\ y &\longmapsto (x, T(y)) \end{aligned}$$

con T operador lineal en $\mathcal{H}$.

Como G_x es un funcional lineal y, por el teorema de Riesz, $\exists! z_x \in \mathcal{H}$ tal que $G_x(y) = (z_x, y)$, es decir

$$(x, T(y)) = (z_x, y)$$

El análisis funcional no se queda en un solo punto, sino que mira el “comportamiento global”. Si ahora cambias el vector x por otro vector x' , el Teorema de Riesz te dará un nuevo vector único $z_{x'}$. Esto significa que hemos creado, sin darnos cuenta, una regla de correspondencia:

- A cada $x \in \mathcal{H}$ le asignamos un vector $z_x \in \mathcal{H}$ tal que $(x, T(y)) = (z_x, y) \quad \forall y \in \mathcal{H}$
- A esa función (ese mapeo) es a lo que bautizamos como operador adjunto y lo denotamos como T^* .

Por lo tanto, escribimos $T^*(x)$ para indicar que ese vector es el resultado de aplicar el operador T^* al vector x .

Definición 7.6. Sea $T \in BL(\mathcal{H})$, se define como **operador adjunto** de T a la aplicación

$$\begin{aligned} T^* : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto T^*(x) \end{aligned}$$

tal que $T^*(x)$ es el único vector que representa a G_x , es decir

$$G_x(y) = (x, T(y)) = (T^*(x), y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Proposición 7.11. Sea $T \in BL(\mathcal{H})$, entonces

$$i) \quad T^{**} = T$$

ii) $\|T^*\| = \|T\|$, y por lo tanto $T^* \in BL(\mathcal{H})$

Demostración. Probemos una inclusión de ii), primero.

$$\|T^*(x)\|^2 = (T^*(x), T^*(x)) = (x, T(T^*(x))) \leq \|x\| \cdot \|T(T^*(x))\| \leq \|x\| \cdot \|T\| \cdot \|T^*(x)\|$$

de lo cual:

$$\|T^*(x)\| \leq \|x\| \cdot \|T\| \implies \|T^*\| \leq \|T\|$$

por lo que tenemos que T^* está acotada, para ver que $T^* \in BL(\mathcal{H})$ necesitamos la linealidad. La linealidad de T^* viene heredada de la estructura del producto interno y la linealidad de T , por lo que $T^* \in BL(\mathcal{H})$.

Por otro lado, veámos ahora i), pues sabiendo lo anterior, aplicando aquí (**) otra vez la definición de operador adjunto que

$$(x, T(y)) = (T^*(x), y) \stackrel{(**)}{=} (x, T^{**}(y)) \quad \forall x, y \implies T = T^{**}$$

Por lo tanto, podemos finalizar la demostración de ii) con $\|T^{**}\| \leq \|T^*\| \iff \|T\| \leq \|T^*\|$ y en consecuencia $\|T\| = \|T^*\|$. $\square$

Proposición 7.12. Sean $S, T \in BL(\mathcal{H})$, entonces se tiene:

- $(S + T)^* = S^* + T^*$
- $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
- $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
- $\|T^* \circ T\| = \|T \circ T^*\| = \|T\|^2$

Ejercicio 7.2.1. Demostrar

- i) $N(T^*) = R(T)^\perp$
- ii) $N(T) = R(T^*)^\perp$

Primero tengamos claro que estos conjuntos son el rango y el núcleo, es decir

$$N(T) = \{x \in \mathcal{H} \mid T(x) = 0\} \quad \text{y} \quad R(T) = \{y \in \mathcal{H} \mid y = T(x) \text{ para algún } x \in \mathcal{H}\}$$

Para demostrar ii), supongamos i), es decir, $N(T^*) = R(T)^\perp$, entonces

$$N(T^{**}) = R(T^*)^\perp$$

Como $T^{**} = T$, tenemos finalmente $N(T) = R(T^*)^\perp$.

Demostremos ahora i), para ello veámos los conjuntos

$$\begin{aligned} N(T^*) &= \{x \in \mathcal{H} \mid T^*(x) = 0\} \\ R(T)^\perp &= \{x \in \mathcal{H} \mid (x, a) = 0 \quad \forall a \in R(T)\} = \{x \in \mathcal{H} \mid (x, T(y)) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H}\} \end{aligned}$$

entonces

$$x \in N(T^*) \implies T^*(x) = 0 \implies (x, T(y)) = (T^*(x), y) = (0, y) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H} \implies x \in R(T)^\perp$$

donde se tiene $N(T^*) \subseteq R(T)^\perp$. Veámos el viceverso, por lo que si $x \in R(T)^\perp$ se cumple que

$$(x, T(y)) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H} \implies (T^*(x), y) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H} \implies T^*(x) = 0$$

Definición 7.7. Sea $T \in BL(\mathcal{H})$ se dice **autoadjunto** si $T = T^*$, es decir

$$(x, T(y)) = (T(x), y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Ejemplo. Sea ℓ_2 con el producto interno usual, es decir, $(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \cdot y_i$, y $\lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$. Definamos

$$\begin{aligned} T : \ell_2 &\longrightarrow \ell_2 \\ x &\longmapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_m x_m, \dots) \end{aligned}$$

y queremos ver que es autoadjunto. Para ello, veámos primero $T \in BL(\ell_2)$, para lo cual se tiene

- **Linealidad:** $T(\alpha x + \beta y) = (\lambda_1(\alpha x_1 + \beta y_1), \lambda_2(\alpha x_2 + \beta y_2), \dots) = \alpha T(x) + \beta T(y)$
- **Continuidad:** tenemos que

$$\|T(x)\|^2 = (T(x), T(x)) = \sum_i \lambda_i^2 x_i^2 \leq \sup_i \lambda_i^2 \cdot \sum_i |x_i|^2 = \|\lambda\|_{\ell_\infty}^2 \cdot \|x\|_{\ell_2}^2$$

Como λ es acotada: sea $\lambda_k : |\lambda_k| \geq \|\lambda\|_{\ell_\infty} - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Entonces, para $\tilde{x} = (\delta_{ki})_i$ (vector de la base canónica), se tiene:

$$\|T(\tilde{x})\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + |\lambda_k|^2 + \dots} = |\lambda_k| \geq \|\lambda\|_{\ell_\infty} - \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|\lambda\|_{\ell_\infty} \implies \|T\| = \|\lambda\|_{\ell_\infty}$$

Tenemos ya que T es un operador lineal y acotado, veamos ahora que es autoadjunto.

$$(x, T(y)) = \sum_i x_i \lambda_i y_i = \sum_i (x_i \lambda_i) y_i = (T(x), y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Ejercicio 7.2.2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $M \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado y $P_M : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ la proyección. Entonces:

- i) P_M es autoadjunto.
- ii) $(P_M(x), x) \geq 0$.
- iii) $\|P_M\| = 1$ (si $M \neq \{0\}$).

- i) Para demostrar que P_M es autoadjunto, es decir, que $(x, P_M(y)) = (P_M(x), y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$, usaremos la descomposición ortogonal de $\mathcal{H}$ respecto a M y $M^\perp$. Dado que M es un subespacio cerrado, entonces $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$, por lo tanto $\forall x, y \in \mathcal{H}$

$$x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x) \quad y \quad y = P_M(y) + P_{M^\perp}(y)$$

entonces

$$\begin{aligned} (x, P_M(y)) &= (P_M(x) + \underbrace{P_{M^\perp}(x)}_{\in M^\perp}, \underbrace{P_M(y)}_{\in M}) = (P_M(x), P_M(y)) + (P_{M^\perp}(x), P_M(y)) = (P_M(x), P_M(y)) \\ (P_M(x), y) &= (P_M(x), P_M(y) + P_{M^\perp}(y)) = (P_M(x), P_M(y)) \end{aligned}$$

donde hemos usado que $P_M(y) \in M$ y $P_{M^\perp}(x) \in M^\perp$ son ortogonales, por lo que $(P_{M^\perp}(x), P_M(y)) = 0$. De lo cual $(x, P_M(y)) = (P_M(x), y)$.

- ii) Para demostrar que $(P_M(x), x) \geq 0$, usaremos la misma descomposición ortogonal que en el apartado anterior, es decir, $x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$, entonces

$$(P_M(x), x) = (P_M(x), P_M(x) + P_{M^\perp}(x)) = (P_M(x), P_M(x)) = \|P_M(x)\|^2 \geq 0$$

- iii) Para demostrar que $\|P_M\| = 1$ (si $M \neq \{0\}$), usaremos la misma descomposición ortogonal que en los apartados anteriores, es decir, $x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$, entonces

$$\|P_M(x)\| \stackrel{(*)}{=} \|x\| - \underbrace{\|P_{M^\perp}(x)\|}_{\geq 0} \leq \|x\| \implies \|P_M\| \leq 1$$

donde en (*) hemos usado el teorema de pitágoras, que indica que si M y $M^\perp$ son ortogonales, entonces $\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$.

Sea $x \in M = \overline{M}$, entonces $P_M(x) = x \implies \|P_M\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|P_M(x)\|}{\|x\|} = 1$, para

algún $x \in M$ con $\|x\| \neq 0$, que lo hay por hipótesis de que $M \neq \{0\}$, por lo que $\|P_M\| = 1$.

Teorema 7.13. Sea $T \in BL(\mathcal{H})$ autoadjunto, entonces

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(T(x), x)|}{\|x\|^2} = \sup_{\|x\|=1} |(T(x), x)|$$

Demostración. Antes de demostrar la igualdad siguiente

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(T(x), x)|$$

Vamos a recordar porque la igualdad

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|(T(x), x)|}{\|x\|^2} = \sup_{\|x\|=1} |(T(x), x)|$$

es obvia. Para ello, sea $x \neq 0$, podemos definir un vector normalizado $u = \frac{x}{\|x\|}$, de tal manera que $\|u\| = 1$. Si sustituimos esto en la expresión del lado izquierdo:

- Por la linealidad del operador T , tenemos que $T(x) = T(\|x\| \cdot u) = \|x\|T(u)$.
- Por las propiedades del producto escalar, se tiene que

$$(T(x), x) = (\|x\|T(u), \|x\|u) = \|x\|^2(T(u), u)$$

- Sustituyendo en el cociente, se obtiene

$$\frac{|(T(x), x)|}{\|x\|^2} = \frac{\|x\|^2 |(T(u), u)|}{\|x\|^2} = |(T(u), u)|$$

Ahora centrémonos en la igualdad complicada. Sea $x \in \mathcal{H}$ tal que $\|x\| = 1$, entonces $|(Tx, x)| \leq \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|^2 = \|T\|$, por lo tanto

$$\sup_{\|x\|=1} |(T(x), x)| \leq \|T\|$$

Mostremos ahora la desigualdad inversa. Sea

$$M = \sup_{\|x\|=1} |(T(x), x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(T(x), x)|}{\|x\|^2}$$

tenemos que $|(T(x), x)| \leq M\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$. Haciendo los siguientes desarrollos, se obtiene

$$\begin{aligned} (T(x+y), x+y) &= (Tx + Ty, x+y) = (Tx, x) + (Ty, y) + (Tx, y) + (x, Ty) = \\ &\stackrel{(*)}{=} (Tx, x) + (Ty, y) + 2(Tx, y) \\ (T(x-y), x-y) &= (Tx, x) + (Ty, y) - 2(Tx, y) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que T es autoadjunto, y restando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene

$$(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) = 4(Tx, y)$$

Ahora aplicando los desarrollos anteriores y la definición de M , tenemos que

$$\begin{aligned} (Tx, y) &= \frac{1}{4} ((T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} (|(T(x+y), x+y)| + |(T(x-y), x-y)|) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} M (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} M (\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la ley del paralelogramo, en Teorema 7.2. Sea $x : \|x\| = 1$ y $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ entonces

$$(Tx, y) = \left(Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|} \right) \leq \frac{1}{2} M \cdot 2$$

de lo cual

$$(T(x), y) = \frac{(T(x), T(x))}{\|T(x)\|} = \frac{\|Tx\|^2}{\|Tx\|} = \|Tx\| \leq M \quad \forall x : \|x\| = 1$$

entonces aplicando la definición de norma de operador, tenemos lo buscado

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq M$$

□

Proposición 7.14. Sea $T \in BL(\mathcal{H})$, entonces

$$T \text{ biyectivo} \iff T^* \text{ biyectivo}$$

7.3. Operadores compactos

Definición 7.8. Sea X un espacio normado, un subconjunto $K \subseteq X$ es **compacto** si toda sucesión $\{x_n\}$ en K admite una subsucesión convergente a un punto de K .

Definición 7.9. Sea X un espacio normado, un subconjunto $A \subseteq X$ es **relativamente compacto** si la clausura de A es compacta.

Definición 7.10. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in BL(X, Y)$. T se dice **operador compacto** si $T(C)$ es relativamente compacto para cada conjunto C acotado.

Análogamente, T es **operador compacto** si para cada $\{x_n\}$ sucesión acotada, $T(x_n)$ admite una subsucesión convergente.

Ejemplo. 1. Si $T : X \rightarrow Y$ es lineal y X, Y son espacios normados de dimensión finita, entonces T es compacto, veámoslo.

X, Y son espacios de dimensión finita $\implies T$ es continua $\equiv$ acotada $\implies$ manda sucesiones acotadas en sucesiones acotadas en $Y \simeq \mathbb{R}^n \implies$ admite subsucesiones convergentes.

En general, si X un espacio de Banach e Y un espacio normado de dimensión finita, si $T \in BL(X, Y)$, entonces T es un operador compacto.

2. $Id : X \rightarrow X$ nunca es compacto para cualquier X espacio normado de dimensión infinita. De hecho: la bola unitaria no es compacta.

Observación. $\mathcal{K}(X, Y) := \{T \in BL(X, Y) \text{ compacto}\} \subseteq BL(X, Y)$ es un subespacio de $BL(X, Y)$.

Teorema 7.15. Sea $\{T_n\} \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$ una sucesión de operadores compactos tales que $T_n \rightarrow T \in BL(X, Y)$, entonces T es compacto.

Demostración. Sea $(x_1, \dots, x_m, \dots)$ una sucesión acotada en X , mostremos que $T(x_k)$ admite una subsucesión convergente.

T_1 es compacto $\implies (T_1(x_k))_k$ tiene una subsucesión convergente, llamémosla $(T_1(x_k^1))$.

T_2 es compacto $\implies (T_2(x_k^1))$ tiene una subsucesión convergente $\implies (T_2(x_k^2))$ es convergente.

Iterando: sea (x_k^n) una subsucesión de $(x_k^{n-1}) \implies T_j(x_k^n)$ es convergente para cada $j \leq n$.

Sea $\{x_k^k\}$ la **sucesión diagonal** $\implies \{T_j(x_k^k)\}$ es convergente $\forall j$. Mostremos que $\{T(x_k^k)\}$ es convergente (o de Cauchy):

$$\begin{aligned} \|T(x_k^k) - T(x_m^m)\| &\leq \|T(x_k^k) - T_j(x_k^k)\| + \|T_j(x_k^k) - T_j(x_m^m)\| + \|T_j(x_m^m) - T(x_m^m)\| \leq \\ &\leq \underbrace{\|T - T_j\|}_{\leq \varepsilon} \cdot \|x_k^k\| + \underbrace{\|T_j(x_k^k) - T_j(x_m^m)\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|T_j - T\|}_{\leq \varepsilon} \cdot \|x_m^m\| \leq 3\varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Observación. Si (T_n) es tal que $R(T_n)$ es de dimensión finita y $T_n \rightarrow T$, entonces T es compacto.

Proposición 7.16. Sean X un espacio de Banach e Y un espacio de Hilbert, y sea $T \in K(X, Y)$. Entonces T es el límite de $(T_n)_n$, donde $(T_n)_n$ es una sucesión de operadores con $R(T_n)$ de dimensión finita.

Ejercicio 7.3.1. Dada la función

$$\begin{aligned} A : L^2((0, 1)) &\longrightarrow L^2((0, 1)) \\ u(t) &\longmapsto Au(t) := a(t) \cdot u(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in (0, 1)$, con $a : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $a \neq 0$. Demuestra que A es un operador lineal y continuo, pero no compacto.

Demostraremos la no compacidad, la definición nos dice que debemos encontrar una sucesión acotada de funciones (e_n) tal que, al aplicarles el operador, la sucesión de imágenes $(A(e_n))$ no tenga ninguna subsucesión convergente.

Como a es no nula, entonces $\exists t_0 \in (0, 1) : a(t_0) \neq 0$, y como a es continua tenemos un intervalo dado por

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } |a(t)| \geq \frac{1}{2}|a(t_0)| > 0 \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

Ahora usaremos (e_n) una base ortonormal (o una sucesión ortonormal) que está concentrada o vive dentro de ese pequeño intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Como es una base ortonormal, se sabe por propiedades de los espacios de Hilbert que

- (e_n) es una sucesión acotada, de hecho $\|e_n\| = 1$ para cada n .

- (e_n) no tiene ninguna subsucesión convergente, de hecho, la distancia entre dos elementos distintos es exactamente $\sqrt{2}$, por lo que no pueden acercarse entre sí, veámoslo

$$\|e_n - e_m\|^2 = (e_n, e_n) - (e_n, e_m) - (e_m, e_n) + (e_m, e_m) = \|e_n\|^2 - 0 - 0 + \|e_m\|^2 = 2 \quad \forall n \neq m$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|A(e_n) - A(e_m)\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 |a(t) \cdot (e_n(t) - e_m(t))|^2 dt \geq \frac{1}{4} |a(t_0)|^2 \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |e_n(t) - e_m(t)|^2 dt \geq \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \frac{1}{4} |a(t_0)|^2 \cdot 2 \geq \frac{1}{2} |a(t_0)|^2 > 0 \quad \forall n, m \end{aligned}$$

donde únicamente hemos aplicado lo deducido anteriormente y la norma de L^2 , y en $(*)$ hemos usado este razonamiento

$$\begin{aligned} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |e_n(t) - e_m(t)|^2 dt &= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (|e_n(t)|^2 - 2e_n(t)e_m(t) + |e_m(t)|^2) dt = \\ &= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |e_n(t)|^2 dt - 2 \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e_n(t)e_m(t) dt + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |e_m(t)|^2 dt = \\ &= 1 - 2 \cdot 0 + 1 = 2 \end{aligned}$$

donde se ha usado que

$$\begin{aligned} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |e_n(t)|^2 dt &= \|e_n\|_{L^2}^2 = 1 \\ \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |e_m(t)|^2 dt &= \|e_m\|_{L^2}^2 = 1 \\ \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e_n(t)e_m(t) dt &= (e_n, e_m)_{L^2} = 0 \end{aligned}$$

lo que hemos demostrado es que la sucesión de esta base ortonormal, no tiene subsucesiones convergentes, aun cuando (e_n) está acotada. Por lo tanto, A no es compacto.

Ejercicio 7.3.2. Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ lineal, entonces

$$T \text{ es compacto} \iff T^* \text{ es compacto}$$

8. Sistemas ortonormales completos

Definición 8.1. Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ se dice **sistema ortonormal** si está constituido por vectores mutuamente ortogonales y de norma unitaria:

$$S = \{e_i \in \mathcal{H}, i \in \mathcal{I} : (e_i, e_j) = \delta_{ij}\}$$

Ejemplo. 1. $\ell_2 : \{e_i\}_{i=1}^{+\infty}$ es un sistema ortonormal.

2. $L^2((0, \pi)) : \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\pi t), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\pi t) \right\}_{t=1, \dots, +\infty}$ es un sistema ortonormal de vectores.

Observación. Si S es un sistema ortonormal, entonces S es un sistema de vectores linealmente independientes.

Observación. Si S es un sistema de vectores linealmente independientes, entonces se puede construir una sucesión ortonormal mediante el proceso de **Gram-Schmidt**.

Definición 8.2. Un sistema ortonormal se dice **completo** si no está contenido propiamente en ningún otro sistema ortonormal (es decir, es maximal por inclusión).

Proposición 8.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio con producto interno, entonces por el **Lema de Zorn** siempre existe un sistema ortonormal completo.

Demostración. Sea

$$S = \{e_i = \frac{x}{\|x\|}, x \neq 0, x \in \mathcal{H}\}$$

y sea $\mathcal{P}$ la familia de todos los conjuntos ortonormales que contienen a S con la relación de orden dada por la inclusión. Se puede demostrar que $\mathcal{P}$ es inductiva y, por lo tanto, por el Lema de Zorn, admite un elemento maximal. $\square$

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces

S es un sistema ortonormal completo $\iff$ si $\forall x \in \mathcal{H}, x \perp S$ entonces $x = 0$
 $\implies$ Sea $x \in \mathcal{H} : (x, s) = 0 \quad \forall s \in S$. Entonces, o bien $x = 0$, o bien

$$\frac{1}{\|x\|}(x, s) = \left(\frac{x}{\|x\|}, s \right) = 0 \implies \frac{x}{\|x\|} \perp S$$

Por lo tanto, $S \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ sería aún un sistema ortonormal, lo cual contradice la maximalidad de S (a menos que $x = 0$).

$\Leftarrow$) Si $x \perp S$, entonces $x = 0$, esto implica que no existe ningún sistema ortonormal $S' \supsetneq S$. Por lo tanto, S es completo.

Ejercicio 2. S es completo $\iff \mathcal{H} = \overline{[S]}$ (la clausura del subespacio generado por S)

Proposición 8.2 (Desigualdad de Bessel finita). Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$. Entonces, $\forall x \in \mathcal{H}$:

$$\sum_{i=1}^n (x, e_i)^2 \leq \|x\|^2$$

Además,

$$x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \perp e_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Demostración. Sea $S_n := \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$, entonces

$$0 \leq \|x - S_n\|^2 = (x - S_n, x - S_n) = \|x\|^2 + \|S_n\|^2 - 2(x, S_n)$$

y por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \|S_n\|^2 &= \left(\sum_i (x, e_i) e_i, \sum_j (x, e_j) e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x, e_i) (x, e_j) (e_i, e_j) \stackrel{(*)}{=} \sum_i (x, e_i)^2 \\ (x, S_n) &= \left(x, \sum_i (x, e_i) e_i \right) = \sum_i (x, e_i)^2 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ se ha utilizado la ortonormalidad de los e_i , es decir, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Tenemos finalmente la desigualdad buscada

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n (x, e_i)^2 \implies \sum_{i=1}^n (x, e_i)^2 \leq \|x\|^2$$

Para la segunda parte, tenemos que

$$\left(x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i, e_j \right) = (x, e_j) - \sum_{i=1}^n (x, e_i) \delta_{ij} = (x, e_j) - (x, e_j) = 0$$

lo que implica que $x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \perp e_j$ para todo $j = 1, \dots, n$. □

Proposición 8.3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $S = \{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ un sistema ortonormal. Entonces, para cada $x \in \mathcal{H}$:

$$S(x) := \{i \in \mathcal{I} \mid (x, e_i) \neq 0\} \text{ es a lo sumo numerable}$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{H} : x \neq 0$. Para cada $n \geq 1$, definimos:

$$\mathcal{S}_n := \left\{ i \in \mathcal{I} \mid |(x, e_i)|^2 > \frac{\|x\|^2}{n} \right\}$$

Entonces, $\mathcal{S}_n$ tiene a lo sumo $n-1$ elementos. De hecho, supongamos por el contrario (P.A.) que $|\mathcal{S}_n| \geq n$, entonces:

$$\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 > \sum_{i=1}^n \frac{\|x\|^2}{n} = \frac{n}{n} \|x\|^2 = \|x\|^2$$

Lo cual es un **ABSURDO** por la desigualdad de **Bessel finita**. Como $S(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$, entonces $S(x)$ es numerable (unión numerable de conjuntos finitos). $\square$

Definición 8.3. Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ un sistema ortonormal completo, dado por $S = \{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, entonces para cada $x \in \mathcal{H}$, definimos la serie:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} |(x, e_i)|^2 \quad \text{con } (x, e_i) := \text{coeficientes de Fourier de } x \text{ respecto a } S$$

Observación. Si demostramos que $\sum_{i \in \mathcal{I}} |(x, e_i)|^2$ converge, entonces converge absolutamente y, por lo tanto, podemos permutar los índices.

Teorema 8.4 (Desigualdad de Bessel). *Sea $S = \{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ un sistema ortonormal, entonces para cada $x \in \mathcal{H}$:*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

Demostración. $S(x)$ **finito**. Ya está demostrado.

$S(x)$ **numerable**. Numeramos los elementos para los cuales $(x, e_i) \neq 0$ como $\{e_1, e_2, \dots\}$, entonces

$$\forall m : \sum_{i=1}^m |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

Mostremos que no depende de la elección del orden de los índices.

Consideremos la serie $\sum_{i \in \mathcal{I}} (x, e_i) e_i$ y sea $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ tal que $(x, e_i) \neq 0$. Sea

$$S_m := \sum_{i=1}^m (x, e_i) e_i$$

entonces para $n \geq m$ se tiene:

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n (x, e_i) e_i \right\|^2 \stackrel{(*)}{=} \sum_{i,j=m+1}^n (x, e_i) \overline{(x, e_j)} (e_i, e_j) = \sum_{i=m+1}^n |(x, e_i)|^2$$

donde en $(*)$ se ha utilizado la conjugación de la segunda componente del producto interno para $\mathbb{C}$ (para $\mathbb{R}$ es el mismo número). Tenemos a continuación que la norma anterior es convergente $\forall n, m$, y por lo tanto:

$$\|S_n - S_m\| \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0 \implies \{S_m\} \text{ es de Cauchy} \stackrel{(*)}{\implies} \exists y \in \mathcal{H} : y = \sum_{i=1}^{+\infty} (x, e_i) e_i$$

donde en (*) se ha utilizado la completitud de $\mathcal{H}$.

Sea $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m, \dots\}$ una numeración diferente, entonces $\exists y' := \sum_{j=1}^{+\infty} (x, e'_j) e'_j$. Mostremos que

$$y = y' \iff \|y - y'\| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\exists \nu_\varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall m > \nu_\varepsilon \text{ que cumple } \|S_m - y\| < \varepsilon, \|S'_m - y'\| < \varepsilon, \sum_{i=\nu_\varepsilon+1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2 < \varepsilon^2$$

donde se ha usado la definición de límite para y, y' , y que la serie de Bessel converge al estar acotada por $\|x\|^2$.

Fijamos $m > \nu_\varepsilon$, entonces $\exists m' > \nu_\varepsilon : \{e_1, \dots, e_m\} \subseteq \{e'_1, \dots, e'_{m'}\}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|S'_{m'} - S_m\|^2 &= \left\| \sum_{\text{finita}} (x, e_i) e_i \right\|^2 = \sum_{\text{finita}} |(x, e_i)|^2 \leq \sum_{i=\nu_\varepsilon+1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2 < \varepsilon^2 \\ \|y - y'\| &\leq \underbrace{\|y - S_m\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|S_m - S'_{m'}\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|S'_{m'} - y'\|}_{\leq \varepsilon} \leq 3\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies y = y' \end{aligned}$$

□

Definición 8.4. Sea S un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces $\forall x \in \mathcal{H}$ está definida la suma de la serie:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (x, e_i) e_i \quad \text{denominada } \mathbf{Serie \ de \ Fourier} \text{ de } x \text{ en } \mathcal{H}$$

Proposición 8.5. Sea S un sistema ortonormal, entonces son equivalentes:

1. S es completo.
2. Si $x \in \mathcal{H}$ y $(x, e_i) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \implies x = 0$.
3. Para cada $x \in \mathcal{H}$ se cumple

$$x = \sum_{i \in \mathcal{I}} (x, e_i) e_i$$

4. (**Identidad de Parseval**) Para cada $x \in \mathcal{H}$

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathcal{I}} |(x, e_i)|^2$$

Demostración. 1 $\implies$ 2) Ya visto anteriormente.

2 $\implies$ 3) Sabemos que $\sum_{i \in \mathcal{I}} (x, e_i) e_i$ es convergente en $\mathcal{H}$. Sea $z := \sum_{i \in \mathcal{I}} (x, e_i) e_i$. Mostremos que $z = x$: Sea $S(x) = \{i \in \mathcal{I} \mid (x, e_i) \neq 0\}$. Entonces:

$$(x - z, e_i) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (x - s_m, e_i) = \lim_{m \rightarrow +\infty} [(x, e_i) - (s_m, e_i)]$$

$$\text{Como } (s_m, e_i) = \left(\sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j, e_i \right) = (x, e_i) \quad \forall m \geq i:$$

$$\implies (x - z, e_i) = 0 \quad \forall m \geq i, \forall i \implies x - z = 0 \implies x = z.$$

3 $\implies$ 4) $x = \sum_{i=1}^{+\infty} (x, e_i) e_i \implies x = \lim_{m \rightarrow +\infty} s_m$, entonces:

$$\|x\|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|s_m\|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i,j=1}^m (x, e_i) \overline{(x, e_j)} (e_i, e_j) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m |(x, e_i)|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2$$

4 $\implies$ 1) Supongamos por el contrario (P.A.) que S no es completo $\implies \exists S' \not\supseteq S$ y por lo tanto $\exists z \in \mathcal{H} : z \neq 0$ y $(z, e_i) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}$. Entonces:

$$\|z\|^2 = \sum_{i \in \mathcal{I}} \underbrace{|(z, e_i)|^2}_0 = 0 \quad \text{pero } z \neq 0 \quad \mathbf{ABSURDO}.$$

□

Teorema 8.6. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces

$\mathcal{H}$ es separable $\iff$ existe un sistema ortonormal S completo y numerable

Demostración. $\Leftarrow$) Si existe S numerable y completo $\implies S = \{e_1, \dots, e_m, \dots\}$ es numerable y completo: $\overline{[S]} = \mathcal{H}$. Tomamos $\{\text{combinaciones lineales de } S \text{ con coeficientes racionales}\}$ en $\mathcal{H}$.

$\implies$) Todo sistema S ortonormal es numerable. Si $z, z' \in S : z \neq z'$, entonces:

$$\|z - z'\|^2 = \underbrace{\|z\|^2}_1 + \underbrace{\|z'\|^2}_1 - \underbrace{2(z, z')}_0 = 2 \implies \|z - z'\| = \sqrt{2} \quad \forall z, z' \in S \text{ distintos.}$$

Entonces: Las bolas $B_1(z)$ (bolas de radio 1 centradas en z) son disjuntas.

Por hipótesis $\mathcal{H}$ es separable $\implies \{x_m\}$ es una sucesión densa en $\mathcal{H}$ y, por lo tanto, en cada bola $B_1(z)$ existe un elemento de la sucesión: $x_m \in B_1(z)$. Como la sucesión $\{x_m\}$ es numerable, entonces S es numerable.

□

Teorema 8.7 (Teorema isomorfismo euclídeo). Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable es isomorfo a ℓ_2 mediante una isometría.

Demostración. Sea $S = \{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$ un sistema ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces $\forall x \in \mathcal{H}$, tenemos

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} (x, e_i) e_i \quad \text{con } \alpha_k := (x, e_k)$$

Definimos el operador lineal

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H} &\longrightarrow \ell_2 \\ x &\longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \end{aligned}$$

veámos que T es una isometría y, por lo tanto, un isomorfismo.

- Veámos que está bien definido, entonces tenemos lo siguiente

$$\|(\alpha_1, \alpha_2, \dots)\|_{\ell_2}^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$$

vemos que está bien definido.

- Demostremos que T es una isometría, entonces

$$\|T(x)\|_{\ell_2} = \|\alpha\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |(x, e_i)|^2} = \|x\|$$

- Demostremos que T es inyectiva, entonces

$$\|Tx\| = 0 \implies \|\alpha\|_{\ell_2} = 0 \implies \sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|^2 = 0 \implies (x, e_i) = 0 \quad \forall i \implies x = 0$$

donde queda demostrada la inyectividad. Notar que esta manera de demostrar la inyectividad se da gracias a que T es lineal.

- Demostremos que T es sobreyectiva, por lo que sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \ell_2$, definimos

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i$$

Si $x \in \mathcal{H}$, hemos terminado, veámos para ello las sumas parciales

$$\begin{aligned} S_m := \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \implies \|S_m - S_n\|^2 &= \left\| \sum_{i=n+1}^m \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=n+1}^m (\alpha_i e_i, \alpha_k e_k) = \\ &= \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=n+1}^m \alpha_i \bar{\alpha}_k (e_i, e_k) = \sum_{i=n+1}^m |\alpha_i|^2 \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

Ejemplo. $L^2((0, 2\pi))$ es un espacio de Hilbert separable, entonces es isométrico a ℓ_2 .

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \ell_2 \implies \exists g \in L^2((0, 2\pi))$ tal que $\alpha_j := (g, e_j)$ para alguna base $\{e_j\}$ de L^2 (por ejemplo, funciones trigonométricas).

9. Teoría espectral

Sea $F : X \rightarrow X$ una aplicación lineal y continua en un espacio de Banach X , entonces hemos visto que si F es biyectiva, entonces F^{-1} es continua. Sea

$$F := T - \lambda Id$$

con $T \in BL(X)$, preguntémonos cuándo F es biyectiva.

Definición 9.1 (Resolvente). Sea $T \in BL(X)$, definimos

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda Id \text{ es biyectiva}\}$$

como el **resolvente**.

Definición 9.2 (Espectro). Sea $T \in BL(X)$, definimos

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda Id \text{ no es biyectiva}\} = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$$

como el **espectro**.

Observación. Si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $T - \lambda Id$ o no es inyectiva o no es sobreyectiva.

Definición 9.3. Sea $T \in BL(X)$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ se dice **valor propio** de T si $T - \lambda Id$ no es inyectiva. Definimos

$$e(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid \lambda \text{ es valor propio}\} \subseteq \sigma(T)$$

como el **conjunto de los valores propios**.

Observación. Sea $\lambda \in e(T)$, entonces

$$\exists x_1 \neq x_2 \in X : (T - \lambda Id)(x_1) = (T - \lambda Id)(x_2)$$

Sea $y := x_1 - x_2 \neq 0$, entonces

$$(T - \lambda Id)(y) = 0 \iff T(y) = \lambda y$$

De lo cual se deduce que

- $\lambda \in e(T) \iff \exists y \neq 0 : T(y) = \lambda y$ (ecuación de valores propios).
- $\lambda \in e(T) \iff \text{Ker}(T - \lambda Id) \neq \{0\}$.

En este caso, y se llama **vector propio** de T respecto a λ y $\text{Ker}(T - \lambda Id)$ se llama **espacio propio** de λ , el cual es un subespacio cerrado.

Teorema 9.1. Sea X un espacio de Banach y sea $T \in BL(X, Y)$, entonces

1. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in e(T)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \text{Ker}(T - \lambda_1 I) \cap \text{Ker}(T - \lambda_2 I) = \{0\}$.
2. Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ son vectores propios correspondientes a valores propios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in e(T)$, entonces $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Demostración. 1) Sea $\bar{x} \in \text{Ker}(T - \lambda_1 I) \cap \text{Ker}(T - \lambda_2 I)$, entonces $T(\bar{x}) = \lambda_1 \bar{x} = \lambda_2 \bar{x} \iff \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \bar{x} = 0 \implies \bar{x} = 0$.

- 2) Sean $E_1, \dots, E_m$ los espacios propios de $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ respectivamente. Sean $\{x_1, \dots, x_m\}$ tales que $x_i \in E_i \quad \forall i = 1, \dots, m$. Entonces $\{x_i\}$ es linealmente independiente.

Supongamos $k > 1$ y demostremos que $\{x_1, \dots, x_k\}$ es linealmente independiente sabiendo que $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ lo es.

$$\text{Sea } \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \implies 0 = \alpha_1 T(x_1) + \dots + \alpha_k T(x_k) \iff 0 = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k.$$

Supongamos por el contrario (P.A.) que $\alpha_k = 1 \implies \lambda_k x_k = -\alpha_1 \lambda_1 x_1 - \dots - \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} x_{k-1}$.

Pero $x_k = -\alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_{k-1} x_{k-1}$, y por lo tanto:

$$-\lambda_k(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1}) = -\alpha_1 \lambda_1 x_1 - \dots - \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} x_{k-1},$$

de lo cual:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0$$

Como $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ son linealmente independientes $\implies$

$$\alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0 \quad \forall i \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0 \implies x_k = 0 \text{ vector propio: ¡ABSURDO!}$$

□

Teorema 9.2. Sea X un espacio de Banach y sea $T \in BL(X, Y)$, entonces

1. $\rho(T)$ es abierto.
2. $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$.

De lo cual $\sigma(T)$ es compacto.

Demostración. 1) Sea $\alpha_0 \in \rho(T)$, es decir, $T - \alpha_0 Id$ es biyectiva. Demostremos que si α está cerca de α_0 , entonces $T - \alpha Id$ es biyectiva.

Sea $f \in X$, consideremos $T(u) - \alpha u = f$. Si $\alpha \in \rho(T) \implies \exists! u : T(u) - \alpha u = f \iff$

$$\iff T(u) - \alpha u - \alpha_0 u = f - \alpha_0 u \iff T(u) - \alpha_0 u = f - \alpha_0 u + \alpha u. \quad \text{Aplicamos } (T - \alpha_0 Id)^{-1} \implies$$

$u = (T - \alpha_0 Id)^{-1}(f - \alpha_0 u + \alpha u) =: G(u)$. Por lo tanto:

$\alpha \in \rho(T) \iff G(u) = u$. Si G es una contracción, hemos terminado:

$$\|G(u) - G(v)\| = \|(T - \alpha_0 Id)^{-1}(f - \alpha)(u - v)\| \leq \|(T - \alpha_0 Id)^{-1}\| \cdot |f - \alpha| \cdot \|u - v\|$$

Sea $\delta > 0 : \delta < \frac{1}{\|(T - \alpha_0 Id)^{-1}\|}$ para $|\alpha - \alpha_0| < \delta \implies G$ es una contracción.

2) Si $\alpha \in \mathbb{R} : |\alpha| > \|T\|$, mostremos que $\alpha \in \rho(T)$:

$T(u) - \alpha(u) = f$, mostremos que $\forall f \in X \exists!$ solución de $T(u) - \alpha u = f$.

$$u := \frac{1}{\alpha}(T(u) - f) =: G(u) \implies \|G(u) - G(v)\| = \frac{1}{|\alpha|} \|T(u) - T(v)\| \leq \frac{\|T\|}{|\alpha|} \|u - v\| < 1 \text{ si } |\alpha| > \|T\|$$

□

Ejemplo. 1. $T = Id$. Resolvamos $(T - \lambda Id)(x) = 0$ con $x \neq 0$ para buscar los valores propios

$$Id(x) - \lambda Id(x) = 0 \iff x - \lambda x = 0 \iff (1 - \lambda) \underbrace{x}_{\neq 0} = 0 \iff \lambda = 1$$

por lo que $\lambda = 1$ es un valor propio con espacio propio X . Si $\lambda \neq 1$, entonces

$$Id(x) - \lambda Id(x) = f \implies x(1 - \lambda) = f \implies x = \frac{1}{1 - \lambda} f$$

donde entonces hemos demostrado que T es biyectiva para $\lambda \neq 1$, pues justo ahora se demostró la sobreyectividad y T es inyectiva para $\lambda \neq 1$, por lo que $\rho(T) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. En este ejemplo trabajaremos con $X = \ell_p$ y el operador

$$\begin{aligned} T : \ell_p &\longrightarrow \ell_p \\ x &\longmapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right) \end{aligned}$$

Si planteamos la ecuación de valores propios $T(x) = \lambda x$ término a término para cada posición de la sucesión, obtenemos un sistema infinito de ecuaciones independientes.

Vamos a resolver la ecuación para una posición genérica n . Si pasamos todo a un solo lado restando, podemos sacar factor común x_n

$$\frac{x_n}{n} - \lambda x_n = 0 \iff \left(\frac{1}{n} - \lambda\right) x_n = 0$$

donde tenemos que o bien $x_n = 0$ o bien $\lambda = \frac{1}{n}$, donde por elección de la componente supondremos que $x_n = \alpha \neq 0$, puesto que sabemos que debe haber al menos una componente no nula para que x sea un vector propio. Tenemos entonces que el vector propio es

$$\lambda = \frac{1}{n}$$

Para el resto de componentes $m \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$, se tiene que

$$\frac{x_m}{m} - \lambda x_m = 0 \iff \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) x_m = 0 \iff x_m = 0$$

donde comprobamos efectivamente que λ es valor propio de la siguiente manera

$$T(0, \dots, \alpha, \dots) = \left(0, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right) = \frac{1}{n} (0, \dots, \alpha, \dots)$$

Por tanto, aplicando esto a cada componente $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$e(T) = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

9.1. Operadores sobre los complejos

Sea $T : H \rightarrow H$ un operador sobre H , un $\mathbb{C}$ -espacio de Hilbert, entonces:

- i) Si T es autoadjunto: $(T(x), x) = (x, T(x)) = \overline{(T(x), x)} \quad \forall x \in H \implies (T(x), x) \in \mathbb{R}.$

Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y $T \in BL(X)$. Definimos:

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda Id \text{ es biyectiva}\}, \quad \sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

Proposición 9.3. Sea $T \in BL(\mathcal{X})$ con X un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, entonces

1. $\rho(T)$ es abierto en $\mathbb{C}$.
2. $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$, de lo cual $\sigma(T)$ es compacto.

Definición 9.4. Definimos el **radio espectral** como

$$r(T) := \inf\{r \geq 0 \mid \sigma(T) \subseteq B_r(0)\}$$

y se llama **conjunto de valores propios** de T a lo siguiente

$$e(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid T - \lambda Id \text{ no es inyectiva}\}$$

Si $\lambda \in e(T)$, entonces $\dim(\text{Ker}(T - \lambda Id))$ se llama **multiplicidad geométrica** de λ .

Teorema 9.4. Sea $T \in BL(X)$, con X espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, entonces

$$\sigma(T) \neq \emptyset$$

Ejemplo. Sea $X = \ell_2$, y sea el siguiente operador lineal

$$\begin{aligned} T : \quad X &\longrightarrow X \\ (x_1, \dots, x_m, \dots) &\longmapsto (x_2, \dots, x_{m+1}, \dots) \end{aligned}$$

con $\|T\| = 1$, entonces sabiendo que $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$, calculemos $\sigma(T)$. Para ello resolvemos lo siguiente

$$T(x) = \lambda x \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{m+1} = \lambda x_m \end{cases} \xrightarrow{x \neq 0} \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_m = \lambda^{m-1} x_1 \\ x_{m+1} = \lambda^m x_1 \end{cases}$$

La sucesión $(x_1, \lambda x_1, \dots, \lambda^m x_1, \dots)$ satisface $T(x) = \lambda x$, pero:

$$x \in \ell_2 \implies x_m \rightarrow 0 \implies \lambda^m x_1 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \iff |\lambda| < 1$$

de lo cual definiendo este nuevo vector

$$\tilde{x} = (1, \lambda, \dots, \lambda^m, \dots)$$

sabemos que cumple $T(\tilde{x}) = \lambda \tilde{x}$, pues solo se ha tomado $x_1 = 1$ para que el vector propio no sea el vector nulo. Ahora para ver que efectivamente es vector propio, basta comprobar que $\tilde{x} \in \ell_2$ si $|\lambda| < 1$, lo cual es cierto, pues

$$\|\tilde{x}\|_{\ell_2}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda^m|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (|\lambda|^2)^m < \infty \iff |\lambda| < 1$$

Por lo tanto, $\tilde{x} \in \ell_2$ si $|\lambda| < 1$ y como $T(\tilde{x}) = \lambda \tilde{x}$, entonces λ es un valor propio si $|\lambda| < 1$.

Para $|\lambda| = 0$, tenemos que $\tilde{x} = (1, 0, \dots, 0)$ es un vector propio, entonces

$$\{|\lambda| < 1\} \subseteq e(T) \subseteq \sigma(T) \subseteq \{|\lambda| \leq 1\}$$

Como $\sigma(T)$ es cerrado, se sigue que

$$\overline{\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\} \subseteq \sigma(T) \implies \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$$

donde hemos usado que un conjunto cerrado que contiene a otro conjunto A , debe contener a la frontera de A .

Calculemos ahora T^* , es decir, dicho operador que cumple

$$(x, T(y)) = (T^*(x), y) \quad \forall x, y \in X$$

entonces

$$(x, T(y))_{\ell_2} = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \cdot y_{m+1} = \sum_{m=2}^{\infty} x_{m-1} y_m = \sum_{m=1}^{\infty} (T^*(x))_m y_m = (T^*(x), y)_{\ell_2}$$

de lo cual se deduce que

$$T^*(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \dots)$$

Ejercicio 9.1.1. Demuestra lo siguiente

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$$

Si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $T - \lambda Id$ no es biyectiva, lo cual implica que $T - \lambda Id$ o no es inyectiva o no es sobreyectiva. En ambos casos, se deduce que

$$(T - \lambda Id)^* = T^* - \bar{\lambda} Id$$

no es biyectiva, lo cual implica que $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$. El recíproco se demuestra de la misma manera.

Teorema 9.5. Sea T un operador compacto, entonces

$$\text{Ker}(T - \lambda Id)$$

es de dimensión finita $\forall \lambda \neq 0$.

Demostración. Basta mostrar que la bola unitaria es compacta $B_1 \subseteq \text{Ker}(T - \lambda Id)$ es compacta

$$(x_n) \subseteq B_1 : \|x_n\| \leq 1 \quad : \quad (T - \lambda Id)(x_n) = 0 \quad \forall n \implies T(x_n) = \lambda x_n \quad \forall n$$

(x_n) es acotada y T es compacto $\implies \exists$ subsucesión convergente $T(x_{n_k}) \rightarrow z \implies \lambda x_{n_k} \rightarrow z$

$x_{n_k} \rightarrow z/\lambda =: x_0$ con $\|x_0\| = \lim_k \|x_{n_k}\| \leq 1 \implies x_0 \in B_1 \implies B_1$ es compacta. $\square$

Ejercicio 9.1.2. Si X es de dimensión infinita y $T \in K(X)$, entonces

$$0 \in \sigma(T)$$

Si por el contrario (P.A.) $T - 0 \cdot Id = T$ fuera biyectiva, entonces $T \circ T^{-1} = Id \in K(X)$ (ya que la composición de operadores compactos es compacta), ¡ABSURDO!.

Teorema 9.6. Sea $T \in K(X)$, entonces

i) $e(T)$ es a lo sumo numerable.

ii) Si $e(T)$ no es finito, entonces 0 es el único punto de acumulación.

Demostración. i) Sea $E_m = \{\lambda \in e(T) \mid |\lambda| \geq \frac{1}{m}\}$ $\forall m$ y supongamos por (*) que E_m es finito o vacío. Entonces:

$$e(T) = \bigcup_{m \geq 1} E_m \implies \text{unión numerable de conjuntos finitos} \implies e(T) \text{ es numerable.}$$

ii) $e(T)$ es numerable $\implies$ posee al menos un punto de acumulación (Bolzano-Weierstrass). Mostremos que es $\tilde{\lambda} = 0$, de hecho:

si $\tilde{\lambda} \neq 0$ fuera de acumulación, $\exists k > 0 : |\tilde{\lambda}| > \frac{1}{k}$, entonces $\exists I_\delta(\tilde{\lambda})$ de radio $\delta > 0$:

$$|\lambda| > \frac{1}{k} \quad \forall \lambda \in I_\delta \quad \text{y} \quad e(T) \cap I_\delta \neq \emptyset \implies e(T) \cap I_\delta \text{ es a lo sumo finito por (*)}$$

lo cual es un ¡ABSURDO! porque $\tilde{\lambda}$ es de acumulación.

AFIRMACIÓN (CLAIM). $E_m = \{\lambda \in e(T) \mid |\lambda| \geq \frac{1}{m}\}$ es finito $\forall m$.

Supongamos por el contrario (P.A.) que existe un $\bar{m} \geq 1$ tal que existe una sucesión $\{\lambda_m\} \subseteq e(T)$ con $|\lambda_m| \geq \frac{1}{\bar{m}} \quad \forall m$, siendo los $\{\lambda_m\}$ distintos.

Sea $(x_m)_m$ la sucesión de vectores propios: $T(x_m) = \lambda_m x_m \implies \{x_m\}$ es un sistema de vectores linealmente independientes.

Consideremos $Y_m := \text{span}(x_1, \dots, x_m) \supsetneq Y_{m-1} \quad \forall m$, subespacios vectoriales cerrados y propios.

Por el **lema de Riesz**, $\exists y_m \in Y_m : \|y_m\| = 1 \quad \text{y} \quad \|y_m - x\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in Y_{m-1}$. Se cumple:

$(T - \lambda_m \text{Id})(Y_m) \subseteq Y_{m-1} \quad \forall m$. De hecho, si $v \in Y_m : v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$, entonces:

$$\begin{aligned} (T - \lambda_m \text{Id})(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) &= \alpha_1 (T - \lambda_m \text{Id})(x_1) + \dots + \alpha_m \underbrace{(T - \lambda_m \text{Id})(x_m)}_0 = \\ &= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) x_1 + \dots + \alpha_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) x_{m-1} \in Y_{m-1}. \end{aligned}$$

Sea $v = y_m \in Y_m$, entonces: $(T - \lambda_m \text{Id})(y_m) \in Y_{m-1}$.

Además, $T(Y_k) \subseteq Y_{m-1} \quad \forall k \in \{1, \dots, m-1\} \implies y_k = \sum_{i=1}^k \beta_i x_i \in Y_k \implies T(y_k) = \sum_{i=1}^k \beta_i \lambda_i x_i \in Y_k$.

Sean $z := T(y_k) - (T - \lambda_m \text{Id})(y_m) \in Y_{m-1} \quad \forall k \in \{1, \dots, m-1\} \implies \frac{z}{\lambda_m} \in Y_{m-1}$.

$$T(y_k) - T(y_m) = z - \lambda_m y_m$$

$$\|T(y_k) - T(y_m)\| = \|\lambda_m y_m - z\| = |\lambda_m| \cdot \left\| y_m - \frac{z}{\lambda_m} \right\| \xrightarrow{\text{Riesz}} \geq |\lambda_m| \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\bar{m}} \cdot \frac{1}{2}. \quad \square$$

□

Observación. Si T es compacto, X es de Banach y $e(T) = \{\lambda_m\}_m$ es numerable entonces

$$e(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|] \implies (\lambda_m) \text{ es acotada con } 0 \text{ como punto de acumulación} \implies \lambda_m \rightarrow 0$$

Ejercicio 9.1.3. Sea el operador

$$\begin{aligned} T : \quad \ell_2 &\longrightarrow \ell_2 \\ (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) &\longmapsto \left(x_1 \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_m}{m}, \dots\right) \end{aligned}$$

Calcular $\sigma(T)$ y $e(T)$, y comprobar que $0 \in \sigma(T)$ pero $0 \notin e(T)$.

En un ejercicio anterior se calculó el conjunto de valores propios que es

$$e(T) = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Este operador T es un operador compacto (podemos visualizarlo porque sus coeficientes diagonales $\frac{1}{n}$ tienden a cero, lo que significa que el operador “aplasta” las dimensiones infinitas de forma continua). Como es un operador compacto en un espacio de dimensión infinita como ℓ_2 , entonces $0 \in \sigma(T)$, y tenemos que el espectro viene dado como

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Teorema 9.7 (Teorema de la alternativa de Fredholm). *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in BL(H)$ compacto. Entonces:*

- a) *si $\lambda \neq 0$, entonces $R(T - \lambda I)$ es cerrado y se cumple $R(T - \lambda I) = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda}I)^\perp$*
- b) *si $\lambda \neq 0$, entonces $\text{Ker}(T - \lambda I) = \{0\} \iff R(T - \lambda I) = H$, es decir:*

$$T - \lambda I \text{ es inyectivo} \iff T - \lambda I \text{ es sobreyectivo}$$

- c) $\dim \text{Ker}(T - \lambda I) = \dim \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda}I)$

Veamos una aplicación. Supongamos que queremos resolver

$$T(u) - \lambda u = f, \text{ con } \lambda \neq 0, f \in H \text{ y } T \text{ compacto}$$

lo que buscaremos es las condiciones de solución para esta ecuación, por lo que primero agruparemos la incógnita u a un lado de la ecuación, y el término independiente f al otro lado, quedando la ecuación de la siguiente forma

$$(T - \lambda Id)(u) = f$$

Preguntarse si esta ecuación es resoluble (es decir, si existe algún $u \in H$ que al aplicarle el operador nos dé f) es exactamente lo mismo que preguntarse si el vector f pertenece a la imagen o rango del operador. En lenguaje matemático:

$$\text{La ecuación es resoluble} \iff f \in R(T - \lambda Id) = \{f \in H \mid \exists u \in H \text{ tal que } (T - \lambda Id)(u) = f\}$$

Como bien indica el apartado b) del Teorema 9.7, tenemos que $T - \lambda Id$ es inyectivo, o no, veamos los dos casos:

- **Caso inyectivo:** si el operador es inyectivo, significa que su núcleo es trivial, es decir, $\text{Ker}(T - \lambda Id) = \{0\}$. Al ser inyectivo, el apartado b) nos obliga a concluir que también es sobreyectivo ($R(T - \lambda Id) = H$), y por tanto significa que la imagen es todo el espacio H , por lo que para cualquier $f \in H$ existe solución.

Además, ser inyectivo significa que no hay dos caminos que lleven al mismo sitio, por lo que esa solución es única ($\exists!$). Esto demuestra matemáticamente $\forall f \in H \exists!$ solución.

- **Caso no inyectivo:** si el operador no es inyectivo, significa que la ecuación homogénea (cuando pones $f = 0$) tiene soluciones distintas de cero

$$(T - \lambda Id)(u) = 0 \implies T(u) = \lambda u$$

Es decir, existen vectores propios asociados al autovalor λ . Además, por la teoría general de operadores compactos (que vimos en el teorema anterior del claim), el espacio de soluciones de un autovalor distinto de cero tiene que ser de dimensión finita.

Esto demuestra matemáticamente que la ecuación con $f = 0$ tiene un número finito de soluciones linealmente independientes.

Entonces $\forall f \in H \exists!$ solución, o bien la ecuación con $f = 0$ tiene un número finito de soluciones linealmente independientes. Por lo tanto:

$T(u) - \lambda u = f$ es resoluble ($f \in R(T - \lambda Id)$) $\iff f \in \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda} Id)^\perp$ y por (c) tiene dimensión n

Vamos a resumir en un resultado claro lo que tenemos hasta ahora.

Corolario 9.7.1. Dado un operador

$$\begin{aligned} T : H &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto T(u) \end{aligned}$$

compacto, lineal y continuo, con $\mathcal{H}$ un espacio de hilbert de dimensión infinita tenemos que

- $0 \in \sigma(T)$ (sea valor propio o no).
- $\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\}$ (apartado b) del Teorema 9.7).
- Se tiene una de las siguientes alternativas:
 - $\sigma(T) = \{0\}$
 - $\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\}$ es un conjunto finito.
 - $\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\}$ es una sucesión λ_n que tiene a $\{0\}$ como único punto de acumulación y $\lambda_n \rightarrow 0$.

Observación. Para el caso X un espacio de Banach y no de Hilbert, tenemos que también se cumple para T compacto, lineal y continuo, que

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\}$$

Ejercicio 9.1.4. Sea el operador

$$\begin{aligned} T : C^0([0, 1]) &\longrightarrow C^0([0, 1]) \\ x &\longmapsto T(x) \end{aligned}$$

donde $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \in C^0([0, 1])$ (función continua), y $T(x)(t) := t \cdot x(t)$. Se pide:

- i) Calcular $\sigma(T)$.
- ii) Demuestra si T es compacto o no.

Veámos la resolución de cada apartado por separado.

- i) Tomemos una función arbitraria $f \in C^0([0, 1])$ y un número $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la ecuación de resolvente es la siguiente

$$(T - \lambda Id)(x) = f$$

y buscamos encontrar si existe dicho x que cumpla esta ecuación. Si existe, entonces $\lambda \in \rho(T)$, y si no existe, entonces $\lambda \in \sigma(T)$. Para resolver esta ecuación, basta con pasar todo a un solo lado y sacar factor común $x(t)$, quedando la ecuación de la siguiente forma

$$(T - \lambda Id)(x)(t) = t \cdot x(t) - \lambda x(t) = (t - \lambda)x(t) = f(t) \iff x(t) = \frac{f(t)}{t - \lambda} \quad \forall t \in [0, 1]$$

Ahora tenemos dos casos a estudiar

- Si $\lambda \notin [0, 1]$, entonces $t - \lambda \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$, por lo que $x(t) = \frac{f(t)}{t - \lambda}$ es una función continua (ya que f es continua y el denominador no se anula), por lo que existe solución para cualquier f , y además es única, por lo que $\lambda \in \rho(T)$.
- Si $\lambda \in [0, 1]$, entonces existirá un punto exacto en el dominio, al que llamamos $t_0 = \lambda$, donde el denominador se desvanece por completo: $(t_0 - \lambda) = 0$. Si intentamos evaluar la solución candidata en ese punto, tendríamos:

$$x(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{0}$$

Si elegimos una función f tal que $f(\lambda) \neq 0$, la división por cero genera una asíntota vertical (una discontinuidad que tiende a infinito). Es imposible encontrar una función continua $x(t)$ que satisfaga la igualdad en ese punto. Por lo tanto, no existe solución para esa función f , y por tanto $\lambda \in \sigma(T)$. Dado esto tenemos entonces que

$$[0, 1] \subseteq \sigma(T)$$

Juntando ambas cosas tenemos finalmente que

$$\sigma(T) = [0, 1]$$

- ii) Para determinar si T es compacto o no, basta con estudiar si el espectro de T sin el punto 0 coincide con el conjunto de valores propios sin el punto 0. En este caso vamos a demostrar que el conjunto de valores propios es vacío, es decir, $e(T) = \emptyset$, lo cual implica que T no es compacto (de lo contrario se tendría $\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\}$). Para ello, basta con resolver la ecuación de valores propios

$$T(x) = \lambda x \iff T(x)(t) = \lambda x(t) \iff t \cdot x(t) = \lambda x(t) \iff (t - \lambda)x(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

donde tenemos que x debe ser una función no nula. Para que el producto de dos números reales sea cero, es obligatorio que el primero sea cero, el segundo sea cero, o ambos. Por lo tanto, en cada punto $t \in [0, 1]$, la matemática nos obliga a elegir entre una de estas dos opciones:

- Opción A: el primer paréntesis se anula: $t = \lambda$.
- Opción B: la función se anula en ese instante: $x(t) = 0$.

Supongamos por un momento que sí existe un valor propio λ con su correspondiente función propia $x(t) \neq 0$. Como hemos supuesto que $x \neq 0$, la definición nos garantiza que existe al menos un punto concreto, llamémoslo t_0 , donde la función tiene una altura distinta de cero

$$x(t_0) \neq 0$$

Si en el punto t_0 la función se encuentra a una altura $x(t_0) \neq 0$, está obligada a mantenerse alejada del cero en todo un pequeño entorno (un intervalo abierto) alrededor de t_0 , entonces

$$x(t) \neq 0 \quad \forall t \in \text{Entorno}(t_0)$$

lo cual es claramente un absurdo, pues λ es una constante y no puede tener varios valores en un entorno de t_0 . Por lo tanto, no existe ningún valor propio λ y $e(T) = \emptyset$.

Antes de finalizar el ejercicio, calcularemos la norma del operador T .

Sabemos que $\sigma(T) = [0, 1] \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$, lo cual implica que $\|T\| \geq 1$. Por otro lado, para cualquier función $x \in C^0([0, 1])$, se cumple que

$$T(x)(t) = t \cdot x(t) \implies \|T(x)\| = \sup_{t \in [0, 1]} |t \cdot x(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)| = \|x\|$$

lo cual implica que $\|T\| \leq 1$. Juntando ambas cosas, se concluye que $\|T\| = 1$.

9.2. Operadores autoadjuntos

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, y $T \in BL(\mathcal{H})$, entonces dado T autoadjunto, recordemos que tenemos que

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} |(T(u), u)| = \sup_{u \neq 0} \frac{|(T(u), u)|}{\|u\|^2}$$

veámos como podemos estimar el espectro.

Teorema 9.8. Sea $T \in BL(H)$, H espacio de Hilbert y T autoadjunto, definimos

$$m := \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (T(u), u) \quad y \quad M := \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (T(u), u)$$

tenemos entonces que

$$\sigma(T) \subseteq [m, M] \quad y \quad m, M \in \sigma(T)$$

Demostración.

□

Observación. Sabemos que $m \in \sigma(T)$, de hecho si m fuera un valor propio (**no nulo**), entonces $m = \min$, veámoslo. Si m es un valor propio, entonces existe un vector propio $\bar{u}$ tal que $T(\bar{u}) = m\bar{u}$ y $\|\bar{u}\| = 1$. Entonces, se tiene que

$$m = (T(\bar{u}), \bar{u}) = (m\bar{u}, \bar{u}) = m(\bar{u}, \bar{u}) = m \cdot 1 = m$$

y por lo tanto, m es el mínimo de la función $(T(u), u)$ sobre la esfera unitaria $\{u \in H : \|u\| = 1\}$, es decir

$$m = \min_{\|u\|=1} \langle T(u), u \rangle$$

Analógamente, si M es un valor propio (**no nulo**), entonces $M = \max$.

Observación. Es importante notar que los vectores propios no tienen porque ser unitarios, es decir, podemos obtener un vector propio $u \in \mathcal{H}$ con norma distinta de 1, pero como el operador es lineal, entonces

$$T(u) = T\left(\|u\| \cdot \frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\| \cdot T\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$$

por lo que $\frac{u}{\|u\|}$ también es un vector propio asociado al mismo valor propio.

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que los vectores propios tienen norma 1, ya que la clave radica en que las soluciones de la ecuación de autovectores no son vectores aislados, sino subespacios vectoriales completos (líneas, planos, etc.), por lo que no existe un vector propio único, sino que existe una infinidad de vectores propios asociados a un mismo valor propio, y entre ellos se encuentra uno con norma 1.

Corolario 9.8.1. Sea T autoadjunto, entonces tenemos que

$$\sigma(T) = \{0\} \implies T \equiv 0$$

Demostración. Sea $m = M = 0$, entonces $(T(u), u) = 0 \quad \forall u \in H$. Por otro lado, se tiene que

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} |(T(u), u)| = 0$$

lo cual implica que $T \equiv 0$. □

Veámos que hemos obtenido, partiendo de $T \in BL(\mathcal{H})$ autoadjunto.

- $\sigma(T) = \{0\} \iff T \equiv 0$.
- Sobre $\mathbb{C}$ los valores propios son todos reales ($\lambda \in \mathbb{R}$), al igual que para las matrices simétricas. De hecho, si $\lambda \neq 0$ es un valor propio con vector propio $u : \|u\| = 1 \implies T(u) = \lambda u$, entonces

$$\begin{cases} (T(u), u) = \lambda(u, u) = \lambda \\ (T(u), u) = (u, T(u)) = \bar{\lambda}(u, u) = \bar{\lambda} \end{cases} \implies \lambda = \bar{\lambda} \iff \lambda \in \mathbb{R}$$

lo cual implica que λ es real si T es autoadjunto.

- Los espacios propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales entre sí, veámoslo.

Sean y_1 tal que $T(y_1) = \lambda_1 y_1$, e y_2 tal que $T(y_2) = \lambda_2 y_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Supongamos $\lambda_1 \neq 0$, entonces

$$y_1 = \frac{T(y_1)}{\lambda_1} \implies (y_1, y_2) = \left(\frac{T(y_1)}{\lambda_1}, y_2 \right) = \frac{1}{\lambda_1} (y_1, T(y_2)) = \frac{1}{\lambda_1} (y_1, \lambda_2 y_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (y_1, y_2)$$

donde para que se de dicha igualdad debemos tener o $\lambda_1 = \lambda_2$ (lo cual es absurdo porque hemos supuesto que son distintos) o $(y_1, y_2) = 0$. Por lo tanto, los espacios propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales entre sí.

Demostrado lo anterior, vamos a resumirlo en un resultado claro.

Proposición 9.9. Sea $T \in BL(\mathcal{H})$ autoadjunto, entonces:

- $\sigma(T) = \{0\} \iff T \equiv 0$.
- $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(T)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces los espacios propios correspondientes a λ_1 y λ_2 son ortogonales entre sí.

Ahora trabajaremos con operadores T autoadjuntos y compactos no nulos ($T \neq 0$), veámos qué podemos decir sobre su espectro. Sabemos que existe al menos un valor propio λ tal que | veámoslo.

Sabemos que $m, M \in \sigma(T)$, y si son diferentes de cero, son valores propios, puesto que antes demostramos que

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\}$$

para dimensión finita de $\mathcal{H}$ y para dimensión infinita tenemos el apartado b) del Teorema de la alternativa de Fredhold. Entonces, tenemos cuatro posibilidades:

- $m = M = 0 \implies \sigma(T) = \{0\} \implies T \equiv 0$, no nos vale este caso.
- $m = 0, M > 0 \implies M$ es un valor propio y $M = \|T\|$ (por la caracterización de la norma de los op. autoadjuntos).
- $m < 0, M = 0 \implies m$ es un valor propio y $|m| = \|T\|$
- $m \neq 0, M \neq 0 \implies m$ y M son valores propios y $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Teorema 9.10. Sea H espacio de Hilbert separable, $T \in BL(\mathcal{H})$ autoadjunto y compacto. Entonces existe una base hilbertiana, es decir, un sistema ortonormal completo formado por vectores propios de T .

Demostración.

□

Observación. El teorema anterior es un resultado muy importante, porque nos dice que en este caso, el operador T se puede diagonalizar completamente, es decir, se puede representar como una matriz diagonal con los valores propios en la diagonal y los vectores propios como columnas. Esto es análogo a lo que ocurre con las matrices simétricas en espacios finitos, pero en este caso estamos trabajando con operadores en espacios de Hilbert de dimensión infinita.

Teorema 9.11. Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y $T \in BL(X)$, entonces

$$\sigma(T) \neq \emptyset$$

Demostración. □

Observación. Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert de dimensión infinita, observamos que dependiendo de si 0 es valor o no propio, tenemos una cantidad de valores propios u otra, véamoslo:

- Si 0 no es un valor propio, entonces $e(T)$ es numerable.
- Si 0 es un valor propio de multiplicidad finita, entonces $e(T)$ es numerable.
- Si 0 es un valor propio de multiplicidad geométrica infinita, entonces $e(T)$ puede ser finito.

Proposición 9.12. Todo operador autoadjunto y compacto T se aproxima con operadores con imagen de dimensión finita.

Demostración. Primero sabemos que cualquier vector $u \in H$ se puede escribir como una serie de Fourier usando los vectores propios

$$u = \sum_n (u, e_n) e_n$$

donde $S = \{e_n\}$ es una base ortonormal, y si agrupamos todos los términos que corresponden al mismo valor propio λ_n , llamamos a ese bloque $u_n = (u, e_n) e_n$, vector propio. ya que como e_n es un vector propio, este nuevo vector agrupado u_n (vector propio por escalar (u, e_n)) sigue siendo un vector propio (porque un múltiplo de un vector propio es un vector propio).

Si aplicamos el operador T a nuestro vector u , por linealidad el operador entra dentro del sumatorio y ataca a cada vector propio u_n

$$T(u) = T\left(\sum_n u_n\right) = \sum_n T(u_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$$

donde guardamos el índice $n = 0$ para el caso en que el cero sea un autovalor, $\lambda_0 = 0$, el cual desaparece de la suma porque multiplicar por cero anula el término.

Para demostrar que T se puede aproximar por operadores de dimensión finita, haremos un “corte” (un truncamiento) en el término k de la serie y define un nuevo operador llamado T_k como

$$T_k(u) := \sum_{n=1}^k \lambda_n u_n$$

Ahora queremos demostrar que si hacemos el corte cada vez más lejos ($k \rightarrow \infty$), el operador truncado T_k se pega tanto a T que el error comete un límite hacia cero, veámoslo

$$\|(T - T_k)(u)\| = \left\| \sum_{n=k+1}^{+\infty} \lambda_n u_n \right\| \leq \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n| \cdot \left\| \sum_{n=k+1}^{+\infty} u_n \right\| \xrightarrow{(*)} 0 \quad \text{si } k \rightarrow +\infty$$

donde en (*) hemos usado que la serie original para el vector u era perfectamente convergente en el espacio de Hilbert, esta parte no es más que el resto de una serie convergente. Por las propiedades fundamentales de las series, a medida que avanzas hacia el infinito, el resto de cualquier serie que converge tiene la obligación matemática de tender a cero. $\square$

9.3. Formulación variacional

En esta sección trabajaremos con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $T \in BL(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto y compacto.

Al tener T autoadjunto y compacto, sabemos que los valores propios son reales y por tanto tienen signo: o son mayores o iguales que cero (≥ 0), o son menores o iguales que cero (≤ 0). Gracias a que no se pueden acumular en ningún otro sitio que no sea el origen (Teorema 9.7), la matemática nos da permiso para hacer algo imposible en otros conjuntos de números reales: podemos hacer una fila india ordenada con ellos.

Vamos a hacer dos listas ordenadas:

- La lista de los positivos (λ_m^+): Se ordenan de mayor a menor (decreciente) marchando hacia el cero: $\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \geq \dots \geq 0$.
- La lista de los negativos (λ_m^-): Se ordenan de menor a mayor (creciente, es decir, de los más negativos a los que se acercan al cero): $\lambda_1^- \leq \lambda_2^- \leq \dots \leq 0$.

Un punto crítico a tener en cuenta es que *repetiremos cada valor propio tantas veces como indica su multiplicidad geométrica*, es decir, si un valor propio λ tiene multiplicidad geométrica k , entonces aparecerá k veces en la lista, por ejemplo si el número 5 tiene un espacio propio de dimensión 2 (hay dos vectores independientes que responden al 5), en nuestra lista lo escribiremos dos veces: $\lambda_1^+ = 5$ y $\lambda_2^+ = 5$. Esto es importante porque la multiplicidad geométrica nos indica cuántos vectores propios linealmente independientes hay asociados a ese valor propio, y al repetirlo en la lista, estamos reflejando esa información de manera explícita.

Tomando las sucesiones de vectores propios normalizados como sigue

$$\{u_n^+\} \text{ para los positivos, } \{u_n^-\} \text{ para los negativos, } \|u_n^+\| = \|u_n^-\| = 1$$

podemos crear una base ortonormal en $\mathcal{H}$ como sigue

$$\{u_m^+, u_n^-\} \text{ es una base ortonormal en } \mathcal{H}$$

Finalmente definiremos los siguientes subespacios vectoriales

$$V_m^+ = \text{span}\{u_1^+, \dots, u_m^+\} \quad \text{y} \quad V_n^- = \text{span}\{u_1^-, \dots, u_n^-\}, \quad V_0 = \{0\}$$

Teorema 9.13. Dado $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable, $T \in BL(\mathcal{H})$ autoadjunto y compacto, entonces

$$\lambda_n^+ = (T(u_n^+), u_n^+) = \max_{\substack{v \neq 0 \\ v \perp V_{n-1}}} \frac{(T(v), v)}{\|v\|^2} = \min_{\substack{V \subseteq H \\ \dim V = n-1}} \left(\max_{\substack{v \neq 0 \\ v \perp V}} \frac{(T(v), v)}{\|v\|^2} \right) \quad \forall n \geq 1$$

En particular tenemos

$$\lambda_1^+ = \max_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{(T(v), v)}{\|v\|^2}$$

Análogamente para los negativos tenemos

$$\lambda_n^- = (T(u_n^-), u_n^-) = \min_{\substack{v \neq 0 \\ v \perp V_{n-1}}} \frac{(T(v), v)}{\|v\|^2} = \max_{\substack{V \subseteq H \\ \dim V = n-1}} \left(\min_{\substack{v \neq 0 \\ v \perp V}} \frac{(T(v), v)}{\|v\|^2} \right) \quad \forall n \geq 1$$

y en particular tenemos

$$\lambda_1^- = \min_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{(T(v), v)}{\|v\|^2}$$

Demostración. Demostraremos solo la primera parte. Sea u_n^+ el vector propio relativo a λ_n^+ con $\|u_n^+\| = 1$, entonces

$$T(u_n^+) = \lambda_n^+ u_n^+ \implies (T(u_n^+), u_n^+) = \lambda_n^+ (u_n^+, u_n^+) \stackrel{(*)}{=} \lambda_n^+$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\|u_n^+\| = (u_n^+, u_n^+) = 1$. □

Ejercicio 9.3.1. Sean X, Y espacios de Banach, T un operador lineal tal que $T : X \longrightarrow Y$, y $\{f_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq Y^*$ una familia que “separa los puntos de Y ”, es decir

$$\forall y_1 \neq y_2, \exists j \in \mathcal{I} \text{ tal que } f_j(y_1) \neq f_j(y_2)$$

Demostrar que si $f_i \circ T$ es continuo $\forall i \in \mathcal{I}$, entonces T es continuo.

Vamos a usar el Teorema del Gráfico Cerrado, para ello entonces debemos demostrar que T es cerrada, lo que equivale a demostrar que el gráfico Γ_T es cerrado, es decir

$$\forall (x_n) \subseteq X : x_n \longrightarrow x \text{ y } T(x_n) \longrightarrow y \implies y = T(x)$$

Supondremos las hipótesis, es decir, una sucesión cualquier (x_n) que cumple

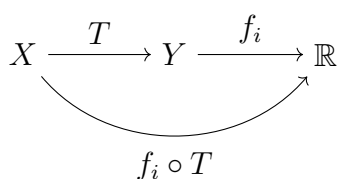
$$x_n \longrightarrow x \text{ y } T(x_n) \longrightarrow y$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_i(T(x_n)) \stackrel{(*)}{=} f_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \right) = f_i(y)$$

donde en $(*)$ hemos usado que f_i continua por pertenecer a Y^* . Mirando el Diagrama 10.1, sabemos que $f_i \circ T$ es una aplicación de X en $\mathbb{R}$ (y continua por hipótesis), y recordando que $x_n \longrightarrow x$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_i \circ T)(x_n) = (f_i \circ T) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = (f_i \circ T)(x) = f_i(T(x))$$

Figura 9.1: Diagrama de la aplicación $f_i \circ T$.

Uniendo ambos resultados tenemos que

$$f_i(T(x)) = f_i(y) \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

Lo que queda ahora es pensar que aún siendo las imágenes iguales, ¿es posible que y y $T(x)$ sean vectores distintos? Esto sabemos que no es posible pues en el caso de $y \neq T(x)$, al tener la propiedad de que la familia “separa los puntos de Y ”, entonces tendríamos

$$f_j(y) \neq f_j(T(x)) \quad \text{para algún } j \in \mathcal{I}$$

lo que es un absurdo con lo obtenido. Queda por tanto demostrado que

$$y = T(x)$$

Teorema 9.14 (Teorema Ascoli-Arzelà). *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto compacto, y sea $C(K)$ el espacio de las funciones continuas sobre K equipado con la norma del supremo $(\|\cdot\|_\infty)$. Un subconjunto de funciones $A \subset C(K)$ es relativamente compacto si y solo si cumple simultáneamente dos condiciones:*

- **Acotación uniforme:** *El conjunto de funciones no se escapa hacia el infinito verticalmente, es decir*

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \|f\|_\infty \leq M \quad \forall f \in A$$

- **Equicontinuidad uniforme:** *Todas las funciones del conjunto comparten el mismo “ritmo” de continuidad. Es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un mismo $\delta > 0$ tal que*

$$\text{Si } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in K, \forall f \in A$$

Ejercicio 9.3.2. Sea $X = L^2((0, 1))$ el espacio de Hilbert de las funciones de cuadro integrable, se define el **operador de Volterra** T como sigue

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto \int_0^x u(t) dt \end{aligned}$$

Demuestra los siguientes puntos:

- T es compacto.
- $0 \in \sigma(T)$.

iii) ¿ $0 \in e(T)$?

Veámos la demostración de los puntos por separado.

i) Para demostrar que T es compacto, primero observamos que $T(u)$ es una función continua en el intervalo $[0, 1]$, ya que la integral de una función de L^2 es continua.

Luego, si tomamos un conjunto acotado B en $L^2((0, 1))$, la imagen de este conjunto bajo T , es decir, $T(B)$, también será acotada en el espacio de funciones continuas $C([0, 1])$. Recordemos que esto significa lo siguiente

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \|u\|_{L^2} \leq M \quad \forall u \in B \quad (9.1)$$

Vamos a hacer ahora dos demostraciones distintas

- **Acotación uniforme:** recordemos primero como funciona la norma infinito para $u \in B$ arbitrario

$$\|T(u)\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 1]} |T(u(x))|$$

entonces veamos como estimar el valor absoluto de la función para un $x \in [0, 1]$ arbitrario

$$\begin{aligned} |T(u(x))| &\leq \int_0^x |u(t)| \cdot 1 \, dt \stackrel{(*)}{\leq} \left(\int_0^x |u(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^x 1^2 \, dt \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_0^x |u(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \cdot |x|^{1/2} \stackrel{(**)}{\leq} \|u\|_{L^2} \cdot |x|^{1/2} \leq \|u\|_{L^2} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la desigualdad de Hölder, y en $(**)$ es, por definición, menor o igual que la norma completa de la función en todo el intervalo. Tenemos aplicado esto a todo $x \in [0, 1]$ lo siguiente

$$\|T(u)\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 1]} |T(u(x))| \leq \max_{x \in [0, 1]} \|u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \quad \forall u \in B$$

y recordando la ecuacion 9.1, entonces tenemos

$$\|T(u)\|_{\infty} \leq \|u\|_{L^2} \leq M \quad \forall u \in B$$

y se tiene la acotación uniforme, es decir, $T(B)$ está acotado en $C([0, 1])$.

- **Equicontinuidad uniforme:** para demostrar la equicontinuidad uniforme, debemos mostrar primero lo siguiente

$$|T(u)(x) - T(u)(y)| \leq |x - y|^{1/2} \|u\|_{L^2} \leq M |x - y|^{1/2} \quad \forall u \in B, \forall x, y \in [0, 1]$$

para ellos usaremos lo mismo que en el caso anterior con la desigualdad de Hölder, veámoslo

$$|T(u)(x) - T(u)(y)| = \left| \int_0^x u(t) \, dt - \int_0^y u(t) \, dt \right| = \left| \int_y^x u(t) \, dt \right| \leq |x - y|^{1/2} \|u\|_{L^2}$$

donde tenemos por tanto demostrado la equicontinuidad uniforme.

Habiendo demostrado estos dos puntos, por el Teorema Ascoli-Arzelà, tenemos $\overline{T(B)}$ compacto en $C([0, 1])$, y por tanto $T(B)$ es compacto en $L^2((0, 1))$, ya que la norma de L^2 es más débil que la norma del supremo, es decir, si algo se pega mucho en la norma del supremo, también se va a pegar obligatoriamente en la norma de la integral al cuadrado. Por lo tanto, T es compacto.

- ii) Para demostrar que $0 \in \sigma(T)$, basta con recordar que T es compacto, y como X es de dimensión infinita, tenemos que

$$0 \in \sigma(T)$$

Esto que hemos aplicado se demostró anteriormente en un ejercicio.

- iii) Para que $\lambda = 0$ sea un valor propio, tendríamos que ser capaces de encontrar una función propia $u \neq 0$ que al meterla en el operador diera cero

$$T(u) = 0 \cdot u = 0$$

En otras palabras, queremos ver si el núcleo del operador ($\text{Ker}(T)$) esconde funciones distintas de cero, para ello viendo la definición de dicho núcleo

$$\text{Ker}(T) = \{u \in L^2((0, 1)) : T(u) = 0\} = \{u \in L^2((0, 1)) : T(u)(x) = \int_0^x u(t) dt = 0 \quad \forall x \in [0, 1]\}$$

Para poder trabajar en el intervalo $[0, 1]$, vamos a usar la función característica de un intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$, es decir, la función $\chi_{[a, b]}$ que vale 1 en el intervalo $[a, b]$ y vale 0 fuera de él. Entonces, si $u \in \text{Ker}(T)$, entonces

$$\int_0^1 u(t) \cdot \chi_{[0, x]}(t) dt = \int_0^x u(t) dt = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Si la integral da cero para cualquier caja que empiece en 0 ($\chi_{[0, x]}$), por resta de intervalos también tiene que dar cero para cualquier caja genérica que empiece en a y termine en b ($\chi_{[a, b]}$). Por ejemplo, si integras entre 0 y b y te da cero, y entre 0 y a y te da cero, la integral en el trozo intermedio $[a, b]$ es obligatoriamente cero, entonces tenemos que

$$\int_0^1 u \cdot f dt = 0 \quad \forall f \in L^2((0, 1))$$

porque las funciones características son densas en L^2 . Aquí está el corazón de la demostración. En la teoría de la medida de L^2 , sabemos que cualquier función salvaje o continua $f \in L^2$ se puede aproximar tanto como queramos mediante combinaciones lineales de funciones de cajas (llamadas funciones escalonadas o simples).

Tenemos por tanto

$$(u, f)_{L^2} = 0 \quad \forall f \in L^2 \implies u = 0$$

es decir, el único vector propio asociado al valor propio 0 es el vector nulo, por lo tanto $0 \notin e(T)$, ya que supusimos que podía ser no nulo y llegamos a la conclusión de que tenía que ser nulo, lo que es un absurdo. Por lo tanto, 0 no es un valor propio de T .

9.3.1. Análisis espectral de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

Cuando me pregunto si un operador tiene valores propios, quiero resolver la ecuación $-\Delta w = \lambda w$ en un dominio Ω con $w = 0$ en el borde $\partial\Omega$, lo que viene a ser

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad \Omega \text{ abierto acotado, regular en } \mathbb{R}^N$$

donde si lo queremos resolver de la manera débil sobre $H_0^1(\Omega)$, tendríamos que

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_{\Omega} w \cdot \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Teorema 9.15. Existe una sucesión $\{w_m\} \subseteq H_0^1(\Omega)$ de funciones ortonormales completa en $L^2(\Omega)$, y existe una sucesión $\{\lambda_m\}$ de números reales positivos tal que $\lambda_m \rightarrow +\infty$ y

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} -\Delta w_m = \lambda_m w_m \\ w_m \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \end{cases}$$

Demostración. □

Observación. Sea $\{w_m\}$ una base ortonormal en L^2 , pero nosotros queríamos una base ortonormal en $H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\varphi_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} w_m \quad \text{es ortonormal en } H_0^1(\Omega)$$

Observación. El valor propio λ_1 es simple (propiedad importante), porque se puede caracterizar como:

$$\lambda_1 = \min \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |v|^2 \, dx}$$

10. Ejercicios

Observación. Para comprobar si un operador lineal y continuo T es compacto en ℓ_2 podemos fiarnos por la siguiente regla.

En el espacio ℓ_2 , un operador que se limita a multiplicar cada componente por un número ($T(x) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$) se llama operador diagonal. Para estos operadores existe una regla intuitiva infalible:

Un operador diagonal es compacto si y solo si sus coeficientes tienden a cero cuando k va al infinito ($\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$) Es claro que igualmente habrá que demostrarlo formalmente, pero nos da una idea clave para que hacer.

10.1. Folio 1

Ejercicio 10.1.1. Sea H un espacio con producto interno y S un sistema ortonormal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) S es completo

(ii) $\forall x \in H, \quad x \perp S \implies x = 0$

$ii) \implies i)$ Sea $x \in H : (x, s) = 0 \quad \forall s \in S$. Entonces, o bien $x = 0$, o bien

$$\frac{1}{\|x\|}(x, s) = \left(\frac{x}{\|x\|}, s \right) = 0 \implies \frac{x}{\|x\|} \perp S$$

Por lo tanto, $S \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ sería aún un sistema ortonormal, lo cual contradice la maximalidad de S (a menos que $x = 0$).

$ii) \implies i)$ Si $x \perp S$, entonces $x = 0$, esto implica que no existe ningún sistema ortonormal $S' \supsetneq S$. Por lo tanto, S es completo.

Ejercicio 10.1.2. Sea H un espacio de Hilbert y S un sistema ortonormal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) S es completo

(ii) $H = \overline{[S]}$, es decir, $[S]$ es denso en H ($[S] = [\text{span } S]$)

Ejercicio 10.1.3. Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ un sistema ortonormal numerable.

Demostrar que $e_n \rightharpoonup 0$, pero $\{e_n\}$ no converge fuertemente a ningún elemento de H

(en particular, $e_n \not\rightarrow 0$ fuertemente).

Recordemos la definición de convergencia débil, para $\mathcal{H}$ un espacio normado aparte de de Hilbert. Se dice que e_n converge débilmente a 0, si

$$F(e_n) \rightarrow F(0) = 0 \quad \forall F \in H^*$$

Como $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, por el teorema de representación de Riesz, que dice lo siguiente:

Sea H un espacio de Hilbert, entonces

$$\forall F \in H^*, \quad \exists! y_F \in H \text{ tal que } F(x) = (x, y_F) \quad \forall x \in H$$

entonces sabemos que cada funcional $F \in H^*$ se puede escribir como $F(x) = (x, y)$ para algún $y \in H$. Por lo tanto, la condición de convergencia débil se puede reescribir como

$$(e_n, y) \rightarrow (0, y) = 0 \quad \forall y \in H$$

Aplicamos la Desigualdad de Bessel al sistema ortonormal $\{e_n\}$ y al vector y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, y)|^2 \leq \|y\|^2 < \infty$$

Como la serie de números reales $\sum |F(e_n)|^2$ converge (su suma es menor que infinito), el término general debe tender a cero de forma obligatoria cuando $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F(e_n)|^2 = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F(e_n) = 0$$

Como hemos partido de un funcional $F \in H^*$ absolutamente genérico y hemos demostrado que $F(e_n) \rightarrow 0 = F(0)$, aplicamos la Definición 5.1 de tus apuntes y concluimos

$$e_n \rightharpoonup 0$$

Ahora vamos a probar que $\{e_n\}$ no converge fuertemente a ningún elemento de H . Para ello, veámos cual es la distancia entre dos elementos cualesquiera del sistema ortonormal, es decir, dados $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$, calculamos la norma de la diferencia entre e_n y e_m

$$\|e_n - e_m\|^2 = (e_n - e_m, e_n - e_m) = (e_n, e_n) - (e_n, e_m) - (e_m, e_n) + (e_m, e_m) = 1 - 0 - 0 + 1 = 2$$

entonces

$$\|e_n - e_m\| = \sqrt{2} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$$

Si recordamos la definición de sucesión de Cauchy, tenemos

Una sucesión es de Cauchy si, a medida que avanzamos hacia el infinito, los términos de la sucesión se van pegando cada vez más entre sí. Es decir, para cualquier distancia pequeña $\epsilon > 0$, existe un momento a partir del cual cualesquiera dos elementos e_n, e_m están a una distancia menor que ϵ :

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|e_n - e_m\| = 0$$

pero nosotros tenemos que si tomamos dos elementos distintos cualesquiera de nuestro sistema, la distancia entre ellos siempre es una constante fija de $\sqrt{2}$, da igual lo grandes que sean n y m , por lo que

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|e_n - e_m\| = \sqrt{2} \neq 0$$

lo que significa que $\{e_n\}$ no es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto no es una sucesión convergente en un espacio de Hilbert (que es completo). En particular, no puede converger a 0 ni a ningún otro elemento de H .

Ejercicio 10.1.4. Sea $X = C^0([0, 1])$ con la norma usual $\|\cdot\|_\infty$ y $T : X \rightarrow X$ el operador integral definido como:

$$T(x)(t) = \int_0^1 K(s, t)x(s) ds \quad \forall x \in C^0([0, 1]), \quad t \in [0, 1]$$

donde $K(t, s)$ es una función continua definida en $[0, 1]^2$. Demostrar que T es un operador compacto.

Ejercicio 10.1.5. Sea $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ definido por:

$$T(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_k}{k}, \dots\right) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_k, \dots) \in \ell_2$$

Demostrar que T es compacto.

Primero probemos que T es lineal y continuo (= acotado):

- **Linealidad:** tomamos dos sucesiones $x, y \in \ell_2$ y dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Evaluando componente a componente

$$T(\alpha x + \beta y) = \left(\alpha x_1 + \beta y_1, \frac{\alpha x_2 + \beta y_2}{2}, \dots, \frac{\alpha x_k + \beta y_k}{k}, \dots\right)$$

Por las propiedades de las sucesiones, podemos separar los términos de x y de y

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots\right) + \beta \left(y_1, \frac{y_2}{2}, \dots\right) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Por tanto, T es lineal.

- **Continuidad:** calculamos la norma al cuadrado de la imagen para cualquier $x \in \ell_2$

$$\|T(x)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{k}\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |x_k|^2$$

Como para todo $k \geq 1$ se cumple que $\frac{1}{k^2} \leq 1$, podemos acotar la serie hacia arriba quitando los denominadores

$$\|T(x)\|_2^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$

Tomando raíces cuadradas, tenemos que $\|T(x)\|_2 \leq 1 \cdot \|x\|_2$. Al estar acotado, el operador es continuo (y de paso sabemos que $\|T\| \leq 1$).

Para demostrar T compacto, buscaremos hacerlo como límite de operadores de rango finito (que son compactos). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos el operador $T_n : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ por

$$T_n(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, 0, \dots\right)$$

Sabemos que son operadores de rango finito, porque para cualquier x , la imagen $T_n(x)$ tiene todas sus componentes nulas a partir de la posición $n + 1$. Por tanto, la imagen está contenida en el subespacio generado por los primeros n vectores de la base canónica ($\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$), que tiene dimensión exacta $n < \infty$. Está claro que es continuo (acotado), por la misma razón que T .

Estudiemos qué le hace el operador resta $(T - T_n)$ a un vector x

$$(T - T_n)(x) = T(x) - T_n(x) = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, \dots\right)$$

Las primeras n componentes se cancelan por completo, y solo sobrevive la “cola” infinita de la sucesión. Calculamos la norma al cuadrado de esta diferencia

$$\|(T - T_n)(x)\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |x_k|^2 \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \|x\|_2^2$$

donde en $(*)$ hemos usado que el sumatorio empieza en $k = n + 1$, por lo que el denominador más pequeño de toda la serie es $(n + 1)^2$. Por lo tanto, para cualquier k en ese sumatorio, se cumple que

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Tomando raíces cuadradas a ambos lados, tenemos que

$$\|(T - T_n)(x)\|_2 \leq \frac{1}{n+1} \|x\|_2$$

Por la definición de norma de un operador como el supremo, deducimos que la norma del operador resta cumple

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

y como la distancia en norma entre T y los operadores de rango finito T_n tiende a cero, concluimos que T es el límite uniforme de operadores de rango finito, es decir, T es compacto.

Ejercicio 10.1.6. Sean X, Y, Z espacios de Banach y T, S dos aplicaciones lineales con $T \in BL(X, Y)$ y $S \in BL(Y, Z)$. Demostrar que si una de las dos aplicaciones entre T y S es compacta, entonces la composición $S \circ T$ es compacta ($S \circ T \in \mathcal{K}(X, Z)$).

Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión acotada cualquiera en X . Nuestro objetivo final es extraer una subsucesión tal que $\{S(T(x_{n_k}))\}$ converja fuertemente en Z . Para ello, tenemos dos casos posibles, dependiendo de cual de las dos aplicaciones sea compacta:

- **T compacto:** como la sucesión de partida $\{x_n\} \subset X$ es acotada y $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ es compacto, la definición nos asegura que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que sus imágenes por T convergen fuertemente a algún elemento $y_0 \in Y$

$$T(x_{n_k}) \longrightarrow y_0 \quad \text{en norma de } Y \text{ (cuando } k \rightarrow \infty)$$

Como S es continua, sabemos que mantiene respecta los límites fuertes, por lo que tenemos

$$S(T(x_{n_k})) = (S \circ T)(x_{n_k}) \longrightarrow S(y_0) \quad \text{en norma de } Z$$

y por tanto $S \circ T$ es compacto.

- **S compacto:** como T es un operador acotado (= continuo), por definición transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Esto significa que la sucesión de sus imágenes en Y , que llamaremos

$$y_n = T(x_n)$$

es una sucesión acotada en Y . Como S es un operador compacto, y tenemos $\{y_n\}$ una sucesión acotada, tenemos entonces que podemos extraer una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ tal que sus imágenes por S convergen fuertemente a un elemento $z_0 \in Z$

$$S(y_{n_k}) \longrightarrow z_0 \quad \text{en norma de } Z \text{ (cuando } k \rightarrow \infty)$$

que reescribiendolo queda como

$$S(T(x_{n_k})) \longrightarrow z_0 \implies (S \circ T)(x_{n_k}) \longrightarrow z_0 \quad \text{en norma de } Z$$

y por tanto $S \circ T$ es compacto.

Ejercicio 10.1.7. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in BL(H)$. Entonces

$$T \text{ compacto} \iff T^* \text{ compacto}$$

$\Leftarrow$) Supongamos demostrada la implicación $\Rightarrow$) entonces tenemos que si T^* es compacto, entonces

$$(T^*)^* \stackrel{(*)}{=} T$$

también es compacto, donde en $(*)$ hemos usado que el operador de adjunción es involutivo, es decir, que aplicarlo dos veces seguidas nos devuelve al operador original. Por lo tanto, T es compacto.

$\Rightarrow$) Para probar que T^* es compacto tomamos una sucesión acotada cualquiera $\{x_n\} \subset H$ (es decir, $\|x_n\| \leq M$ para todo n), y nuestro objetivo es demostrar que la sucesión de imágenes por el adjunto, $\{T^*(x_n)\}$, contiene una subsucesión que converge fuertemente (en norma) en H .

Es claro que como $T^* \in BL(\mathcal{H})$ es un operador acotado, entonces la sucesión de imágenes $\{T^*(x_n)\}$ también es acotada, porque para todo n se cumple que

$$\|T^*(x_n)\| \leq \|T^*\| \cdot \|x_n\| \leq \|T^*\| \cdot M$$

Por lo tanto, $\{T^*(x_n)\}$ es una sucesión acotada en H , por lo que sabiendo que T es compacto, tendríamos que para la imagen por dicho operador $\{T(T^*(x_n))\}$ existe una subsucesión, que denotaremos mediante los índices n_k , tal que converge fuertemente a algún elemento $z \in H$

$$T(T^*(x_{n_k})) \longrightarrow z \quad (\text{en norma de } H \text{ cuando } k \rightarrow \infty)$$

Como $\mathcal{H}$ es un espacio completo (de Hilbert), tenemos que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy, por lo que esa subsucesión de imágenes dobles cumple que

$$\|T(T^*(x_{n_k} - x_{n_m}))\| \stackrel{(*)}{=} \|T(T^*(x_{n_k})) - T(T^*(x_{n_m}))\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } k, m \rightarrow \infty \quad (10.1)$$

donde en $(*)$ hemos usado la linealidad de los operadores T, T^* . Ahora nos centraremos en ver si la subsucesión para nuestro operador T^* es de Cauchy, es decir, veámos la distancia entre dos cuales quiera términos

$$\begin{aligned} \|T^*(x_{n_k}) - T^*(x_{n_m})\|^2 &= \|T^*(x_{n_k} - x_{n_m})\|^2 = (T^*(x_{n_k} - x_{n_m}), T^*(x_{n_k} - x_{n_m})) = \\ &\stackrel{(*)}{=} (x_{n_k} - x_{n_m}, T(T^*(x_{n_k} - x_{n_m}))) \stackrel{(**)}{\leq} \|x_{n_k} - x_{n_m}\| \cdot \|T(T^*(x_{n_k} - x_{n_m}))\| \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la propiedad del operador adjunto, y en $(**)$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Viendo la desigualdad triangular del primero término del producto final tenemos

$$\|x_{n_k} - x_{n_m}\| \leq \|x_{n_k}\| + \|x_{n_m}\| \leq M + M = 2M$$

y entonces tenemos

$$\|T^*(x_{n_k} - x_{n_m})\|^2 \leq 2M \cdot \|T(T^*(x_{n_k} - x_{n_m}))\|$$

Por la Ecuación (10.1), el bloque de la derecha tiende a cero cuando $k, m \rightarrow \infty$, por lo que

$$\|T^*(x_{n_k}) - T^*(x_{n_m})\|^2 = \|T^*(x_{n_k} - x_{n_m})\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } k, m \rightarrow \infty$$

que demuestra que la subsucesión $\{T^*(x_{n_k})\}$ es de Cauchy, y por ser H un espacio completo, esa subsucesión converge fuertemente a algún elemento de H . Por lo tanto, T^* es compacto.

Ejercicio 10.1.8. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in BL(X, Y)$. Demostrar que si T es compacto, entonces:

$$x_n \rightharpoonup x_0 \quad \text{en } X \implies T(x_n) \longrightarrow T(x_0) \quad \text{en } Y$$

Como la sucesión $\{x_n\}$ converge débilmente a x_0 , por una consecuencia directa del Principio de Acotación Uniforme (PAU), sabemos que la sucesión es acotada en norma

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \|x_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Supongamos, por el contrario, que la sucesión de imágenes $\{T(x_n)\}$ no converge fuertemente a $T(x_0)$. Por la definición de límite, si una sucesión no converge a un

punto, significa que existe un radio $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que sus imágenes se quedan siempre fuera de la bola de radio ε centrada en $T(x_0)$

$$\|T(x_{n_k}) - T(x_0)\| \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

El objetivo será aplicando la unicidad del límite de la convergencia débil y su relación con la convergencia fuerte, que demosremos que dicha sucesión si converge a $T(x_0)$, llegando a una contradicción, veámoslo.

Ahora miremos la subsucesión $\{x_{n_k}\}$. Como es una subsucesión de una sucesión acotada, $\{x_{n_k}\}$ también es acotada. Como el operador T es compacto, entonces de $\{x_{n_k}\}$ podemos extraer una sub-subsucesión tal que sus imágenes convergen fuertemente a algún elemento $y \in Y$

$$T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow y \quad (\text{cuando } j \rightarrow \infty)$$

Como la convergencia fuerte implica la débil, tenemos que

$$T(x_{n_{k_j}}) \rightharpoonup y \quad \text{débilmente en } Y \quad (10.2)$$

Por otro lado, recordemos que la sucesión original cumplía que $x_n \rightharpoonup x_0$ débilmente, por lo que la subsucesión $\{x_{n_{k_j}}\}$ también conserva el mismo límite débil

$$x_{n_{k_j}} \rightharpoonup x_0 \quad \text{débilmente en } X$$

y aplicando que T aparte de ser compacto, es un operador lineal y continuo, entonces

$$T(x_{n_{k_j}}) \rightharpoonup T(x_0) \quad \text{débilmente en } Y \quad (10.3)$$

Ahora juntando Ecuación (10.3) y (10.2), tenemos que como el límite de la convergencia débil es único, entonces

$$T(x_0) = y \implies T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow y = T(x_0)$$

pero nosotros comenzamos diciendo que todos los términos de la subsucesión $\{T(x_{n_k})\}$ tenían que estar a una distancia mayor o igual que ε de $T(x_0)$. Es imposible que una sub-subsucesión de ella converja a $T(x_0)$ si todos sus términos están “lejos” a una distancia fija ε , por lo que llegamos a una contradicción.

Como asumir que la sucesión no convergía fuertemente nos ha llevado a una contradicción matemática insalvable, nuestro supuesto inicial debe ser falso. Por lo tanto, obligatoriamente

$$T(x_n) \longrightarrow T(x_0) \quad \text{fuertemente en norma en } Y$$

como se quería demostrar.

Ejercicio 10.1.9. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in BL(X, Y)$. Demostrar que si X es reflexivo y para cada sucesión $\{x_n\} \subset X$ se cumple la implicación:

$$x_n \rightharpoonup x_0 \implies \{T(x_n)\} \text{ es relativamente compacta}$$

entonces T es un operador compacto.

Aplicando el Teorema de Banach-Alaoglu al espacio de Banach X^* , obtenemos que la bola cerrada $B_{X^{**}}$ es débilmente- $*$ compacta en X^{**} . Como X es reflexivo, la inyección canónica $J : X \rightarrow X^{**}$ es sobreyectiva, por lo que identifica exactamente la bola original con la del bidual ($J(B_X) = B_{X^{**}}$), entonces como X es reflexivo tenemos que

convergencia débil y convergencia débil- $*$ coinciden en $X^* \implies B_X$ es débilmente compacta en X

Llegados a este punto queremos probar que T es compacto, para ello tomaremos una sucesión acotada cualquier $\{x_n\} \subset X$, y veremos si de $\{T(x_n)\}$ podemos extraer una subsucesión convergente.

Como la sucesión está acotada, eso significa que existe un radio $R > 0$ tal que $\|x_n\| \leq R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, toda la sucesión está contenida en una bola cerrada acotada (que formalmente es un escalado de la bola unidad, $R \cdot B_X$). Como acabamos de demostrar minuciosamente usando la reflexividad de X y el Teorema de Banach-Alaoglu, la bola cerrada en X es débilmente compacta, lo que significa que $\{x_n\}$ contiene una subsucesión débilmente convergente en la bola cerrada.

Por lo tanto, de nuestra sucesión acotada $\{x_n\}$ podemos extraer una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge débilmente a un elemento $x_0 \in R \cdot B_X \subseteq X$

$$x_{n_k} \rightharpoonup x_0 \stackrel{(*)}{\implies} \{T(x_{n_k})\} \text{ es relativamente compacta en } Y$$

donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis que nos da el enunciado. Por definición, que el conjunto de términos de la sucesión $\{T(x_{n_k})\}$ sea relativamente compacto en un espacio métrico completo (como el espacio de Banach Y) significa que su clausura es compacta.

La consecuencia directa de esto en términos de sucesiones es que de esa misma sucesión de imágenes se puede volver a extraer una subsucesión que converge fuertemente (en norma) hacia un punto de Y . Denotemos a esta nueva sub-subsucesión mediante un doble subíndice como $\{x_{n_{k_j}}\}$. Entonces, existe un elemento $y \in Y$ tal que

$$T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow y \quad (\text{en norma de } Y \text{ cuando } j \rightarrow \infty)$$

Hemos partido de una sucesión acotada cualquiera $\{x_n\} \subset X$ y, gracias a la reflexividad y a la hipótesis de compacidad relativa, hemos sido capaces de encontrar una subsucesión $\{x_{n_{k_j}}\}$ tal que sus imágenes por el operador, $\{T(x_{n_{k_j}})\}$, convergen fuertemente en norma.

10.2. Folio 2

Ejercicio 10.2.1. Para el operador $T : \ell_p \longrightarrow \ell_p$, con $1 \leq p < \infty$, definido por $T(x) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots)$ para $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_p$, demostrar:

- (i) $0 \in \sigma(T)$
 - (ii) 0 no es un valor propio
 - (iii) $\sigma(T) = \{0, 1, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$
- i) Para demostrar que $0 \in \sigma(T)$, para ello sabemos primero que ℓ_p es de dimensión infinita, por lo tanto si vemos que el operador es compacto tendríamos lo pedido. Para ello, basta con observar que T es el límite de los operadores de rango finito $T_n : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ (que son compactos) definidos por:

$$T_k(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_k}{k}, 0, 0, \dots\right)$$

Ahora calculamos la norma de la diferencia $(T - T_k)$

$$(T - T_k)(x) = \left(0, \dots, 0, \frac{x_{k+1}}{k+1}, \frac{x_{k+2}}{k+2}, \dots\right)$$

Evaluamos su norma en ℓ_p

$$\|(T - T_k)(x)\|_p^p = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n}\right|^p \leq \frac{1}{(k+1)^p} \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^p \leq \frac{1}{(k+1)^p} \|x\|_p^p$$

Tomando la raíz p -ésima a ambos lados

$$\|(T - T_k)(x)\|_p \leq \frac{1}{k+1} \|x\|_p$$

Por la definición de norma de un operador

$$\|T - T_k\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T - T_k)(x)\|_p}{\|x\|_p} \leq \frac{1}{k+1}$$

Si hacemos el límite cuando $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T - T_k\| = 0$$

Como T es el límite en norma de una sucesión de operadores compactos (T_k) , T es compacto, y se tendría $0 \in \sigma(T)$.

- ii) La idea a aplicar es que cuando decimos que $\lambda = 0$ es un valor propio significa que existe un vector no nulo $x \neq 0$ tal que $T(x) = 0 \cdot x = 0$. Es decir, buscamos si el núcleo $\ker(T)$ tiene más elementos que el cero. Veámoslo rigurosamente. Planteamos la ecuación de autovalores para $\lambda = 0$:

$$T(x) = 0 \implies \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right) = (0, 0, \dots, 0, \dots)$$

Igualando componente a componente: $x_1 = 0 \frac{x_2}{2} = 0 \implies x_2 = 0 \dots \frac{x_n}{n} = 0 \implies x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. El único vector que cumple esto es el vector nulo $x = 0$. Como no existe ningún vector $x \neq 0$ tal que $T(x) = 0$, concluimos rigurosamente que 0 no es un valor propio ($0 \notin e(T)$).

iii) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos probar que $\lambda \in \rho(T)$, es decir, que para cualquier sucesión $y \in \ell_p$, existe una única solución $x \in \ell_p$ tal que

$$(T - \lambda I)(x) = y$$

donde lo que estamos demostrando a priori es la sobreyectividad e inyectividad. Si escribimos esta ecuación componente a componente:

$$\left((1 - \lambda)x_1, \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)x_2, \dots, \left(\frac{1}{n} - \lambda\right)x_n, \dots \right) = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$$

Como hemos elegido un λ que no anula ningún término (ya que $\lambda \neq \frac{1}{n}$), podemos despejar cada componente x_n de forma única

$$x_n = \frac{y_n}{\frac{1}{n} - \lambda} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

falta ver que efectivamente $(x_n) \in \ell_p$. Para conseguirlo, analizamos el comportamiento del denominador cuando $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \lambda \right) = 0 - \lambda = -\lambda$$

Como $\lambda \neq 0$, este límite es un número estrictamente distinto de cero. Esto significa que la sucesión de los denominadores no se acerca a cero infinitamente; se mantiene “lejos” de cero a partir de cierto término. Por lo tanto, la sucesión inversa está acotada por una constante superior $M > 0$

$$\left| \frac{1}{\frac{1}{n} - \lambda} \right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, se cumple la siguiente desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{y_n}{\frac{1}{n} - \lambda} \right|^p \leq M^p \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < +\infty$$

lo que implica que $x = (x_n) \in \ell_p$.

Ejercicio 10.2.2. Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H , con $M \neq H$. Demostrar que si $P = P_M$ es el operador de proyección ortogonal sobre M , entonces los números 0 y 1 son valores propios de P .

Demostrar además que el conjunto de los valores propios es precisamente $\{0, 1\}$ (en realidad se podría demostrar que $\sigma(P) = \{0, 1\}$).

Usaremos el Teorema de la Proyección Ortogonal (o de Descomposición Ortogonal), que dice que si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H , entonces el espacio entero se puede romper limpiamente en la suma directa de M y su complemento ortogonal $M^\perp$, es decir

$$H = M \oplus M^\perp$$

lo que significa que cualquier vector $x \in H$ se puede escribir de forma única como

$$x = x_M + x_{M^\perp}$$

donde $x_M \in M$ y $x_{M^\perp} \in M^\perp$. El operador de proyección ortogonal actúa quedándose únicamente con la parte que vive en M : $P(x) = x_M$.

Demostraremos ahora que 0 y 1 son valores propios de P . Para probar que un número λ es un valor propio, debemos encontrar un vector no nulo $x \neq 0$ tal que $P(x) = \lambda x$.

- **Caso $\lambda = 1$:** tomemos un vector cualquiera x que viva dentro del subespacio M (con $x \neq 0$, lo cual es posible porque al ser subespacio contiene al menos al vector nulo, y el enunciado no dice que $M = \{0\}$). Como $x \in M$, su descomposición única es simplemente $x = x + 0$, donde su componente ortogonal es cero. Por definición del operador de proyección:

$$P(x) = x = 1 \cdot x$$

Por lo tanto, $\lambda = 1$ es un valor propio de P , y cualquier vector de M es un autovector asociado (es decir, $M \subseteq V_1$).

- **Caso $\lambda = 0$:** tomemos ahora un vector cualquiera y que viva en el complemento ortogonal, $y \in M^\perp$. Como el enunciado nos dice que $M \neq H$, el complemento ortogonal $M^\perp$ no es vacío y contiene vectores distintos de cero ($y \neq 0$). La descomposición única de este vector es $y = 0 + y$, ya que su componente en M es nula. Aplicando el operador de proyección:

$$P(y) = 0 = 0 \cdot y$$

Por lo tanto, $\lambda = 0$ es un valor propio de P , y cualquier vector de $M^\perp$ es un autovector asociado (es decir, $M^\perp \subseteq V_0$).

Queremos probar que no puede existir ningún otro valor propio misterioso fuera de estos dos. Para ello, supongamos que existe un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \neq 0, 1$ con un vector propio asociado no nulo $x \neq 0$, tal que

$$P(x) = \lambda x$$

Vamos a descomponer de forma única a ese autovector x usando el teorema de la proyección: $x = x_M + x_{M^\perp}$, por lo que si aplicamos el operador P a ambos lados de la igualdad de autovalores, obtenemos por un lado

$$P(x) = P(x_M + x_{M^\perp}) = P(x_M) + P(x_{M^\perp}) = x_M + 0 = x_M$$

Y por el otro lado, sustituyendo x por su descomposición en la expresión λx

$$\lambda x = \lambda(x_M + x_{M^\perp}) = \lambda x_M + \lambda x_{M^\perp}$$

Igualando ambas expresiones ($P(x) = \lambda x$)

$$x_M = \lambda x_M + \lambda x_{M^\perp} \implies (1 - \lambda)x_M - \lambda x_{M^\perp} = 0$$

Como M y $M^\perp$ son ortogonales, la intersección entre ellos es únicamente el vector cero ($M \cap M^\perp = \{0\}$). Dado que $(1 - \lambda)x_M \in M$ y $\lambda x_{M^\perp} \in M^\perp$, para que su resta sea el vector nulo, cada componente por separado debe ser obligatoriamente cero

$$(1 - \lambda)x_M = 0 \quad \text{y} \quad \lambda x_{M^\perp} = 0$$

Como el autovector original $x \neq 0$, es imposible que x_M y $x_{M^\perp}$ sean cero a la vez. Esto nos fuerza a analizar dos únicos caminos posibles:

- Si $x_M \neq 0$, entonces de la ecuación $(1 - \lambda)x_M = 0$ se deduce que $(1 - \lambda) = 0$, lo que implica que $\lambda = 1$, contradicción.
- Si $x_{M^\perp} \neq 0$, entonces de la ecuación $\lambda x_{M^\perp} = 0$ se deduce que $\lambda = 0$, contradicción.

por lo que no puede existir ningún valor propio λ distinto de 0 y 1. Por lo tanto, el conjunto de los valores propios de P es exactamente $\{0, 1\}$, es decir

$$e(T) = \{0, 1\}$$

Ejercicio 10.2.3. Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \rightarrow H$ un operador compacto. Demostrar que no puede existir una constante $\alpha > 0$ tal que:

$$(T(x), x) \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in H$$

Es importante notar que vamos a suponer dimensión infinita para $\mathcal{H}$, pues para el caso de dimensión finita, no es cierto lo propuesto. Podemos tomar por ejemplo el espacio de Hilbert $\mathbb{R}^2$ de dimensión finita, y donde sabemos que la bola unidad es compacta y entonces

$$\begin{aligned} Id : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

es compacto. Estaríamos en la hipótesis del enunciado, pero en cambio tendríamos

$$(Tx, x) = (x, x) = 1 \cdot \|x\|^2$$

y tomando $\alpha = 1$ tendríamos la contradicción del enunciado.

Dicho esto, estudiemos ahora el caso de $\mathcal{H}$ dimensión infinita, donde supondremos que si existe $\alpha > 0$ que cumple dicha característica y veremos a donde llegamos. Como el espacio de Hilbert H es de dimensión infinita, existe un sistema ortonormal infinito de vectores $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$, que por definición cumplen

$$\|e_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \langle e_n, e_m \rangle = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

y de los cuales la distancia entre dos de ellos distintos (ya calculada en teoría varias veces) se puede obtener así

$$\begin{aligned} \|e_n - e_m\|^2 &= (e_n, e_n) - (e_n, e_m) - (e_m, e_n) + (e_m, e_m) \|e_n - e_m\|^2 = \\ &= 1 - 2(0) + 1 = 2 \implies \|e_n - e_m\| = \sqrt{2} \quad \forall n \neq m \end{aligned}$$

Por propiedades por ser sistema ortonormal, sabemos que la sucesión $\{e_n\}$ está acotada y como T es compacto, podemos obtener una subsucesión de sus imágenes convergente, es decir

$$T(e_{n_k}) \longrightarrow z \quad \text{en norma de } H \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

Dado que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy ($\mathcal{H}$ espacio de Hilbert), esta subsucesión de imágenes cumple obligatoriamente que la distancia entre sus términos tiende a cero cuando los índices crecen

$$\|T(e_{n_k}) - T(e_{n_m})\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } k, m \rightarrow \infty$$

Vamos a evaluar la propiedad de la hipótesis con $x = e_{n_k} - e_{n_m}$ donde $k \neq m$

$$\alpha \|e_{n_k} - e_{n_m}\|^2 \leq (T(e_{n_k}) - T(e_{n_m}), e_{n_k} - e_{n_m}) \stackrel{(*)}{\leq} \|T(e_{n_k}) - T(e_{n_m})\| \cdot \|e_{n_k} - e_{n_m}\|$$

donde en $(*)$ hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Aplicando la distancia entre dos elementos de la sucesión distintos tenemos que

$$\alpha \cdot 2 \leq \|T(e_{n_k}) - T(e_{n_m})\| \cdot \sqrt{2} \implies \sqrt{2}\alpha \leq \|T(e_{n_k}) - T(e_{n_m})\|$$

donde finalmente si tendemos $k, m \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\sqrt{2}\alpha \leq 0 \implies \alpha \leq 0$$

lo cual es una contradicción, pues dijimos $\alpha > 0$, entonces no existe dicho α y queda demostrado lo que se quería.

Ejercicio 10.2.4. Sea $\mathcal{H} = \ell_2$, entonces dado el siguiente operador

$$\begin{aligned} T : \quad \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) &\longmapsto (x_2, \dots, x_{n+1}, \dots) \end{aligned}$$

Calcular el operador adjunto T^* y demostrar que ningún número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ puede ser valor propio de T^* .

Recordemos que el espacio $\mathcal{H} = \ell_2$ es el espacio de sucesiones complejas de cuadrado sumable, dotado del producto escalar estándar

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

Por definición, el operador adjunto T^* es el único operador que satisface la identidad

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x, y \in \ell_2$$

Desarrollemos el lado izquierdo aplicando la definición de tu operador $T(x) = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots)$

$$\begin{aligned} (Tx, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (Tx)_n \overline{y_n} = x_2 \overline{y_1} + x_3 \overline{y_2} + x_4 \overline{y_3} + \dots + x_{n+1} \overline{y_n} + \dots = \\ &= x_1 \cdot \overline{0} + x_2 \cdot \overline{y_1} + x_3 \cdot \overline{y_2} + \dots + x_n \cdot \overline{y_{n-1}} + \dots = ((x_1, x_2, x_3, \dots), (0, y_1, y_2, y_3, \dots)) \end{aligned}$$

Comparando con la definición del adjunto $\langle x, T^*y \rangle$, deducimos por unicidad que

$$T^*(y) = (0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \dots)$$

a este operador T^* se le conoce como el operador de desplazamiento a la derecha (**right shift operator**).

Veremos ahora si hay valores propios. Por definición, un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T^* si existe un vector no nulo $y \in \ell_2$ ($y \neq 0$) tal que se cumple la ecuación de autovalores

$$T^*(y) = \lambda y$$

donde si la vemos componente a componente viene dada como

$$\begin{cases} 0 &= \lambda y_1 \\ y_1 &= \lambda y_2 \\ \vdots & \\ y_n &= \lambda y_{n+1} \\ \vdots & \end{cases}$$

Veámos los distintos casos de λ :

- **Caso** $\lambda = 0$: de la primera ecuación $0 = \lambda y_1$ se deduce que y_1 puede ser cualquier número complejo, pero de la segunda ecuación $y_1 = \lambda y_2$ se deduce que y_1 debe ser necesariamente cero. Si seguimos con el resto de componentes vemos que todos los términos de la sucesión sean cero

$$y = (0, 0, 0, \dots)$$

y como el vector nulo no puede ser un vector propio por definición, concluimos que $\lambda = 0$ no es valor propio.

- **Caso** $\lambda \neq 0$: de la primera ecuación $0 = \lambda y_1$ se deduce que $y_1 = 0$. De la segunda ecuación $y_1 = \lambda y_2$ se deduce que $y_2 = 0$. De la tercera ecuación $y_2 = \lambda y_3$ se deduce que $y_3 = 0$. Siguiendo este razonamiento, vemos que todos los términos de la sucesión deben ser cero

$$y = (0, 0, 0, \dots)$$

y como el vector nulo no puede ser un vector propio por definición, concluimos que ningún $\lambda \neq 0$ es valor propio.

Finalmente obtenemos que ningún número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ es valor propio de T^* , es decir

$$e(T^*) = \emptyset$$

Ejercicio 10.2.5. Si X es espacio de Banach de dimensión infinita y $T \in K(X)$, entonces

$$0 \in \sigma(T)$$

Si por el contrario (P.A.) $T - 0 \cdot Id = T$ fuera biyectiva, entonces $T \circ T^{-1} = Id \in K(X)$ (ya que la composición de operadores compactos es compacta), veámos que la identidad Id no es compacto.

Sabemos que como X es de dimensión infinita, entonces la bola unitaria no es compacta. Si el operador $Id : X \rightarrow X$ fuese compacto, por definición, transformaría el conjunto acotado B_X en un conjunto relativamente compacto. Como $Id(B_X) = B_X$, esto significaría que la clausura de B_X (que es ella misma, por ser cerrada) es compacta. Es decir, B_X sería compacta en norma, pero dijimos que no era compacta, y por tanto como llegamos a una contradicción, tenemos que Id no es compacto, es decir

$$0 \in \sigma(T)$$

Ejercicio 10.2.6. Sea $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ el operador definido por:

- (I) $T(x) = \{\alpha_i x_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ si $x = (x_1, \dots, x_j, \dots) \in \ell_2$
donde $\{\alpha_j\}$ es una sucesión que representa los números racionales en $[0, 1]$, es decir

$$\{\alpha_j\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

- (II) $T(x) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_k}{k}, \dots)$ si $x = (x_1, \dots, x_j, \dots) \in \ell_2$

En ambos casos, I) o II), determinar el espectro de T y los posibles valores propios. ¿Es T compacto?

Veámos ambos casos por separado.

Caso I) Como $\{\alpha_j\}$ es una numeración de los racionales en $[0, 1]$, todos los coeficientes cumplen que $|\alpha_j| \leq 1$, entonces

$$\|T(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i x_i|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|^2 |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} 1 \cdot |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 = \|x\|_{\ell_2}^2$$

que cumple la continuidad de T y la linealidad es trivial. Vamos a probar que T no es compacto, para ellos cogeremos la base canónica $\{e_n\}$, y tenemos que $T(e_n) = \alpha_n e_n$, ahora tomemos una subsucesión cualquier de esta sucesión de imágenes, es decir, $T(e_{n_k}) = \alpha_{n_k} e_{n_k}$, y veamos su comportamiento.

Dado que $\{\alpha_j\}$ es una numeración de los racionales en $[0, 1]$, esta sucesión de coeficientes $\{\alpha_{n_k}\}$ no puede tener ningún límite (pues los racionales no tienen ningún punto de acumulación), por lo que la distancia entre dos términos distintos de esta sucesión no puede tender a cero, es decir

Ejercicio 10.2.7. Sea el operador

$$\begin{aligned} T : C^0([0, 1]) &\longrightarrow C^0([0, 1]) \\ x &\longmapsto T(x) \end{aligned}$$

donde $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \in C^0([0, 1])$ (función continua), y $T(x)(t) := t \cdot x(t)$. Se pide:

- i) Calcular $\sigma(T)$.
- ii) Demuestra si T es compacto o no.

Veámos la resolución de cada apartado por separado.

- i) Tomemos una función arbitraria $f \in C^0([0, 1])$ y un número $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la ecuación de resolvente es la siguiente

$$(T - \lambda Id)(x) = f$$

y busquemos encontrar si existe dicho x que cumpla esta ecuación. Si existe, entonces $\lambda \in \rho(T)$, y si no existe, entonces $\lambda \in \sigma(T)$. Para resolver esta ecuación, basta con pasar todo a un solo lado y sacar factor común $x(t)$, quedando la ecuación de la siguiente forma

$$(T - \lambda Id)(x)(t) = t \cdot x(t) - \lambda x(t) = (t - \lambda)x(t) = f(t) \iff x(t) = \frac{f(t)}{t - \lambda} \quad \forall t \in [0, 1]$$

Ahora tenemos dos casos a estudiar

- Si $\lambda \notin [0, 1]$, entonces $t - \lambda \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$, por lo que $x(t) = \frac{f(t)}{t - \lambda}$ es una función continua (ya que f es continua y el denominador no se anula), por lo que existe solución para cualquier f , y además es única, por lo que $\lambda \in \rho(T)$.
- Si $\lambda \in [0, 1]$, entonces existirá un punto exacto en el dominio, al que llamamos $t_0 = \lambda$, donde el denominador se desvanece por completo: $(t_0 - \lambda) = 0$. Si intentamos evaluar la solución candidata en ese punto, tendríamos:

$$x(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{0}$$

Si elegimos una función f tal que $f(\lambda) \neq 0$, la división por cero genera una asíntota vertical (una discontinuidad que tiende a infinito). Es imposible encontrar una función continua $x(t)$ que satisfaga la igualdad en ese punto. Por lo tanto, no existe solución para esa función f , y por tanto $\lambda \in \sigma(T)$. Dado esto tenemos entonces que

$$[0, 1] \subseteq \sigma(T)$$

Juntando ambas cosas tenemos finalmente que

$$\sigma(T) = [0, 1]$$

- ii) Para determinar si T es compacto o no, basta con estudiar si el espectro de T sin el punto 0 coincide con el conjunto de valores propios sin el punto 0. En este caso vamos a demostrar que el conjunto de valores propios es vacío, es decir, $e(T) = \emptyset$, lo cual implica que T no es compacto (de lo contrario se tendría $\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\}$). Para ello, basta con resolver la ecuación de valores propios

$$T(x) = \lambda x \iff T(x)(t) = \lambda x(t) \iff t \cdot x(t) = \lambda x(t) \iff (t - \lambda)x(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

donde tenemos que x debe ser una función no nula. Para que el producto de dos números reales sea cero, es obligatorio que el primero sea cero, el segundo sea cero, o ambos. Por lo tanto, en cada punto $t \in [0, 1]$, la matemática nos obliga a elegir entre una de estas dos opciones:

- Opción A: el primer paréntesis se anula: $t = \lambda$.
- Opción B: la función se anula en ese instante: $x(t) = 0$.

Supongamos por un momento que sí existe un valor propio λ con su correspondiente función propia $x(t) \neq 0$. Como hemos supuesto que $x \neq 0$, la definición nos garantiza que existe al menos un punto concreto, llamémoslo t_0 , donde la función tiene una altura distinta de cero

$$x(t_0) \neq 0$$

Si en el punto t_0 la función se encuentra a una altura $x(t_0) \neq 0$, está obligada a mantenerse alejada del cero en todo un pequeño entorno (un intervalo abierto) alrededor de t_0 , entonces

$$x(t) \neq 0 \quad \forall t \in \text{Entorno}(t_0)$$

lo cual es claramente un absurdo, pues λ es una constante y no puede tener varios valores en un entorno de t_0 . Por lo tanto, no existe ningún valor propio λ y $e(T) = \emptyset$.

Ejercicio 10.2.8. Sea $T \in BL(H)$ autoadjunto y compacto. Entonces los números:

$$m = \inf_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in H}} \langle T(u), u \rangle \quad M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle T(u), u \rangle$$

son mínimo y máximo.

Queremos demostrar que el supremo $M = \sup_{\|u\|=1} (Tu, u)$ se alcanza, es decir, que existe un vector $\bar{u} \in H$ con $\|\bar{u}\| = 1$ tal que $(T\bar{u}, \bar{u}) = M$.

Por la propia definición de supremo, existe una sucesión de vectores $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ en la esfera unidad ($\|u_n\| = 1$) tal que sus imágenes por la forma cuadrática convergen a M

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Tu_n, u_n \rangle = M$$

Como la sucesión $\{u_n\}$ está acotada ($\|u_n\| = 1$), por las propiedades de los espacios de Hilbert, sabemos que posee una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ que converge débilmente a algún elemento $\bar{u} \in H$ (es decir, $u_{n_k} \xrightarrow{w} \bar{u}$).

Aquí es donde entra la compacidad de T . Por definición, un operador es compacto si transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes (en norma). Por lo tanto

$$u_{n_k} \xrightarrow{w} \bar{u} \implies T(u_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(\bar{u})$$

Vamos a calcular el límite de nuestra forma cuadrática a lo largo de esta subsucesión

$$\langle T(u_{n_k}), u_{n_k} \rangle = \langle T(u_{n_k}) - T(\bar{u}) + T(\bar{u}), u_{n_k} \rangle = \langle T(u_{n_k}) - T(\bar{u}), u_{n_k} \rangle + \langle T(\bar{u}), u_{n_k} \rangle$$

Analicemos los dos términos cuando $k \rightarrow \infty$:

- El primer término se apaga por la convergencia fuerte en norma del Paso 2

$$|\langle T(u_{n_k}) - T(\bar{u}), u_{n_k} \rangle| \leq \|T(u_{n_k}) - T(\bar{u})\| \cdot \|u_{n_k}\| \rightarrow 0$$

- El segundo término converge por la definición de convergencia débil ($u_{n_k} \xrightarrow{w} \bar{u}$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T(\bar{u}), u_{n_k} \rangle = \langle T(\bar{u}), \bar{u} \rangle$$

Uniendo ambos resultados, obtenemos que

$$M = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T(u_{n_k}), u_{n_k} \rangle = \langle T(\bar{u}), \bar{u} \rangle$$

Hemos demostrado que el valor M se alcanza en el vector $\bar{u}$, solo nos falta un detalle crítico: asegurarnos de que $\bar{u}$ mide 1.

Por la convergencia débil, sabemos por propiedad general que $\|\bar{u}\| \leq \liminf \|u_{n_k}\| = 1$. ¿Podría ser menor que 1? ¿O incluso cero?

- **Caso A:** si $M > 0$, si $\|\bar{u}\| < 1$ (y dado que no puede ser cero porque entonces $\langle T\bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \neq M$), podemos definir el vector normalizado $v = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$, que cumple $\|v\| = 1$. Calculamos su valor:

$$\langle Tv, v \rangle = \left\langle T\left(\frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}\right), \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\bar{u}\|^2} \langle T\bar{u}, \bar{u} \rangle = \frac{1}{\|\bar{u}\|^2} M$$

Como $\|\bar{u}\| < 1$, entonces $\frac{1}{\|\bar{u}\|^2} > 1$. Como $M > 0$, esto implicaría que:

$$\langle Tv, v \rangle > M$$

¡Contradicción! No podemos encontrar un vector con un valor mayor que el supremo M . Por lo tanto, obligatoriamente $\|\bar{u}\| = 1$.

- **Caso B:** si $M = 0$ Si el supremo es 0, dado que T es autoadjunto y compacto, por el teorema espectral sus valores propios son reales. Si $M = 0$, significa que $\langle Tu, u \rangle \leq 0$ para todo u , por lo que el operador es semidefinido negativo. En este caso, el valor propio máximo es 0 y su vector propio asociado (que siempre podemos elegir de norma 1) cumplirá que $\langle T\bar{u}, \bar{u} \rangle = \langle 0, \bar{u} \rangle = 0 = M$.
- **Caso C:** si $M < 0$, se razona exactamente igual que en el Caso A, pero la contradicción con las desigualdades se invierte de signo.

Por lo tanto, en todos los casos existe un vector legítimo con $\|\bar{u}\| = 1$ tal que

$$M = \max_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle T(u), u \rangle$$

Análogamente, repitiendo el proceso con una sucesión minimizante, se demuestra para el ínfimo m

$$m = \min_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle T(u), u \rangle$$

Ejercicio 10.2.9. Sea $X = L^2((0, 1))$ y T el operador definido por:

$$T(u)(x) = \int_0^x u(t) dt, \quad \forall u \in X$$

(es el mismo de un ejercicio precedente)

- i) Demostrar que T es compacto (*Sugerencia: utilizar adecuadamente el Teorema de Ascoli-Arzelà*).
- ii) ¿El número 0 pertenece al espectro de T ? ¿Es un valor propio?

Ejercicio 8.3.2.

Ejercicio 10.2.10. Sea X un espacio normado, $z \in X$ un elemento suyo fijado y f un funcional en X^* . Definimos el siguiente operador $T : X \rightarrow X$:

$$T(x) = f(x)z, \quad x \in X$$

Demostrar que T es compacto.

Veámos primero la linealidad y continuidad del operador.

- **Linealidad:** tomamos dos elementos $x, y \in X$ y dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$). Usando la linealidad del funcional $f \in X^*$

$$T(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y)z = (\alpha f(x) + \beta f(y))z = \alpha f(x)z + \beta f(y)z = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Por tanto, T es lineal.

- **Continuidad (= Acotación):** calculamos la norma de la imagen para cualquier $x \in X$. Como $f(x)$ es un escalar y z es un vector, los escalares salen fuera del módulo de la norma

$$\|T(x)\| = \|f(x)z\| = |f(x)| \cdot \|z\|$$

Como el enunciado nos dice que $f \in X^*$, sabemos por definición que f es un funcional continuo, lo que significa que está acotado por su propia norma: $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, entonces

$$\|T(x)\| \leq (\|f\| \cdot \|x\|) \cdot \|z\| = (\|f\| \cdot \|z\|) \cdot \|x\|$$

y dado que $\|f\|$ y $\|z\|$ son números reales fijos y constantes, si llamamos $C = \|f\| \cdot \|z\|$, tenemos que

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|$$

por lo que T acotado, y entonces T es continuo.

Vamos a demostrar ahora que T es compacto. Vamos a mirar cuál es la imagen del operador ($\text{Im}(T)$), es decir, qué tipo de vectores pueden salir de aplicar T

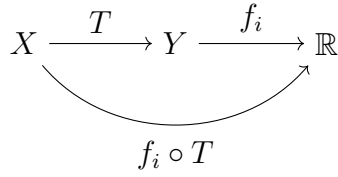
$$T(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{Escalar}} \cdot \underbrace{z}_{\text{Vector fijo}}$$

Cualquier vector que salga de aplicar T a un elemento x del espacio es simplemente el vector fijo z multiplicado por un número. Esto significa que toda la imagen de T se encuentra contenida en la recta generada por el vector z

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{z\} \implies \dim(\text{Im}(T)) \leq 1 < \infty$$

por lo que como la imagen tiene dimensión finita, por definición T es un operador de rango finito. Sabemos por un teorema visto que todo operador de rango finito es compacto, pero esto se ve fácilmente de la siguiente manera.

Si tomamos un conjunto acotado B en X , entonces su imagen $T(B)$ es un conjunto acotado en $\text{span}\{z\}$, es decir, es un conjunto acotado en una recta. Cualquier conjunto acotado en una recta es relativamente compacto, pues su clausura es compacta (es un segmento de recta cerrado y acotado). Por lo tanto, $T(B)$ es relativamente compacto para cualquier conjunto acotado B de X , lo que implica que T es compacto.

Figura 10.1: Diagrama de la aplicación $f_i \circ T$.

10.3. Folio 3

Ejercicio 10.3.1. Sean X, Y espacios de Banach, T un operador lineal tal que $T : X \rightarrow Y$, y $\{f_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq Y^*$ una familia que “separa los puntos de Y ”, es decir

$$\forall y_1 \neq y_2, \exists j \in \mathcal{I} \text{ tal que } f_j(y_1) \neq f_j(y_2)$$

Demostrar que si $f_i \circ T$ es continuo $\forall i \in \mathcal{I}$, entonces T es continuo. (*Sugg.: utilizar el teorema del gráfico cerrado*)

Vamos a usar el Teorema del Gráfico Cerrado, para ello entonces debemos demostrar que T es cerrada, lo que equivale a demostrar que el gráfico Γ_T es cerrado, es decir

$$\forall (x_n) \subseteq X : x_n \rightarrow x \text{ y } T(x_n) \rightarrow y \implies y = T(x)$$

Supondremos las hipótesis, es decir, una sucesión cualquier (x_n) que cumple

$$x_n \rightarrow x \text{ y } T(x_n) \rightarrow y$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_i(T(x_n)) \stackrel{(*)}{=} f_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \right) = f_i(y)$$

donde en $(*)$ hemos usado que f_i continua por pertenecer a Y^* . Mirando el Diagrama 10.1, sabemos que $f_i \circ T$ es una aplicación de X en $\mathbb{R}$ (y continua por hipótesis), y recordando que $x_n \rightarrow x$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_i \circ T)(x_n) = (f_i \circ T) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = (f_i \circ T)(x) = f_i(T(x))$$

Uniendo ambos resultados tenemos que

$$f_i(T(x)) = f_i(y) \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

Lo que queda ahora es pensar que aún siendo las imágenes iguales, ¿es posible que y y $T(x)$ sean vectores distintos? Esto sabemos que no es posible pues en el caso de $y \neq T(x)$, al tener la propiedad de que la familia “separa los puntos de Y ”, entonces tendríamos

$$f_j(y) \neq f_j(T(x)) \quad \text{para algún } j \in \mathcal{I}$$

lo que es un absurdo con lo obtenido. Queda por tanto demostrado que

$$y = T(x)$$

Ejercicio 10.3.2. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert separable H y $T : H \rightarrow H$ una aplicación lineal y continua. Demostrar que

$$T \text{ es isometría} \iff \{T(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}^+} \text{ es un sistema ortonormal en } H$$

$\implies$) Para probar que $\{T(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ es un sistema ortonormal, por definición, debemos demostrar que se cumplen dos condiciones para cualquier par de índices n, m :

- (i) $\|T(e_n)\| = 1$ para todo n (norma de cada vector es 1).
- (ii) $(T(e_n), T(e_m)) = 0$ para todo $n \neq m$ (vectores son ortogonales).

Sabiendo que T es isometría veámos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 &= \|x + y\|^2 = \|T(x + y)\|^2 = (T(x + y), T(x + y)) = \\ &= 2(T(x), T(y)) + \|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 = \\ &= 2(T(x), T(y)) + \|x\|^2 + \|y\|^2 \implies (x, y) = (T(x), T(y)) \quad \forall x, y \in H \end{aligned}$$

Aplicando lo demostrado anteriormente tenemos que dados dos elementos cualesquiera de nuestra base ortonormal, e_n y e_m , entonces

$$(T(e_n), T(e_m)) = (e_n, e_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

donde queda demostrado (i) y (ii), y por tanto $\{T(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ es un sistema ortonormal en H .

$\Leftarrow$) Aquí tenemos que demostrar que T es una isometría, es decir, $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

Sea $x \in H$ un vector cualquiera del espacio de Hilbert. Como $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ es una base ortonormal (que equivale a ser sistema ortonormal completo), podemos expandir el vector x en su serie de Fourier abstracta

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n, \quad \text{donde } \alpha_n = (x, e_n)$$

y por la identidad de parseval se tiene

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \tag{10.4}$$

Introduciendo la igualdad de cualquier $x \in \mathcal{H}$ en la aplicación de T tenemos

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n\right) \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n T(e_n) \implies \|T(x)\|^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n T(e_n), \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m T(e_m)\right)$$

donde en (*) hemos aplicado linealidad y continuidad (esta última para poder meter el operador dentro del límite de la sumatoria). Siguiendo con el mismo desarrollo tenemos

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_n \overline{\alpha_m} (T(e_n), T(e_m)) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \cdot 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2$$

donde hemos demostrado que T es una isometría, y por tanto queda demostrado el ejercicio.

Ejercicio 10.3.3. Sea M un subespacio cerrado de uno espacio de Hilbert H y $T \in BL(H)$. Demostrar que:

- i) si T es autoadjunto y M es invariante por T (es decir, $T(M) \subseteq M$), entonces también $M^\perp$ es invariante por T (es decir, $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$).
- ii) si M y $M^\perp$ son invariantes por T , entonces lo son también por T^* .

Ejercicio 10.3.4. Sea $T : C^0([0, \pi]) \longrightarrow C^0([0, \pi])$ el siguiente operador lineal:

$$T(u)(t) = \sin(t)u(t), \quad t \in [0, \pi]$$

Encontrar la norma de T , el espectro de T , los posibles valores propios y los correspondientes espacios propios. ¿Es el operador T compacto?

Recordemos que aquí trabajamos con la norma del supremo dada así

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in [0, \pi]} |u(t)| = \max_{t \in [0, \pi]} |u(t)|$$

donde trabajamos con el máximo (en lugar de supremo), porque al ser funciones continuas, el teorema de Weierstrass nos asegura que se alcanza el máximo. Sabemos que $C^0([0, \pi])$ es el espacio de las funciones continuas en $[0, \pi]$ que es un espacio de Banach.

Calcularemos ahora la norma del supremo, para ello primero buscaremos la acotación superior, veámoslo

$$\|T(u)\|_\infty = \max_{t \in [0, \pi]} |T(u)(t)| = \max_{t \in [0, \pi]} |\sin(t)u(t)|$$

Sabemos que para cualquier $t \in [0, \pi]$, el seno está acotado por 1 ($|\sin(t)| \leq 1$). Por lo tanto, podemos separarlo hacia arriba:

$$\|T(u)\|_\infty \leq \max_{t \in [0, \pi]} (1 \cdot |u(t)|) = \max_{t \in [0, \pi]} |u(t)| = \|u\|_\infty \quad \forall u \in C^0([0, \pi])$$

Pasando la norma de u dividiendo, el supremo de la fracción no puede superar a 1, por lo que

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|T(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leq 1$$

Ahora falta tomar un $u \in C^0([0, \pi])$ tal que encontremos que esa fracción es 1, para ello tomaremos $u(t) = 1 \quad \forall t \in [0, \pi]$, y entonces tenemos

$$\|T(u)\|_\infty = \max_{t \in [0, \pi]} |\sin(t) \cdot 1| = \max_{t \in [0, \pi]} |\sin(t)| = 1$$

donde el máximo se alcanza en $t = \frac{\pi}{2}$, y sabiendo que $\|1\|_\infty = 1$, tenemos que

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|T(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \geq \frac{\|T(1)\|_\infty}{\|1\|_\infty} = 1 \implies \|T\| = 1$$

Estudiaremos ahora los valores propios y los subespacios propios asociados. Planteamos la ecuación de autovalores $T(u) = \lambda u$ para una función no nula $u \neq 0$. Esto significa que en cada punto $t \in [0, \pi]$ debe cumplirse

$$\sin(t)u(t) = \lambda u(t) \implies (\sin(t) - \lambda)u(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \pi]$$

Para que λ sea un valor propio, debe existir una función continua $u(t)$ que no sea idénticamente cero y cumpla esa igualdad en todo el intervalo. Analicemos qué ocurre:

- Si fijamos un valor de λ , el paréntesis $(\sin(t) - \lambda)$ solo puede valer cero, a lo sumo, en uno o dos puntos aislados del intervalo $[0, \pi]$ (por ejemplo, si $\lambda = 1$, solo vale cero en $t = \pi/2$).
- En todos los demás puntos de la línea donde $\sin(t) \neq \lambda$, el paréntesis no es cero, lo que obliga matemáticamente a que $u(t) = 0$.
- Como la función $u(t)$ debe ser obligatoriamente continua, si vale cero en casi todo el intervalo, por continuidad se ve arrastrada a valer cero también en esos puntos aislados.

Por tanto, la única función continua que satisface la ecuación para cualquier λ es la función nula $u(t) = 0$. Como no existe ninguna función testigo no nula, concluimos que el operador no tiene ningún valor propio, es decir

$$e(T) = \emptyset$$

Calculemos ahora el espectro de T , donde ya sabemos que

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$$

Por definición, un número $\lambda \in \mathbb{C}$ pertenece al espectro $\sigma(T)$ si el operador $(T - \lambda I)$ no es biyectivo (es decir, o falla la inyectividad o falla la sobreyectividad). Para comprobar esto, planteamos la ecuación fundamental del espectro: intentamos despejar una función incógnita $u(t)$ a partir de una función dada $v(t)$ (ambas continuas en $[0, \pi]$)

$$(T - \lambda I)u(t) = v(t) \implies \sin(t)u(t) - \lambda u(t) = v(t)$$

Si queremos despejar nuestra función solución $u(t)$, el álgebra nos obliga a pasar dividiendo el paréntesis

$$u(t) = \frac{v(t)}{\sin(t) - \lambda}$$

A partir de esta fracción, el análisis se divide en dos mundos completamente opuestos dependiendo de si el denominador se puede hacer cero o no.

- **Caso $\lambda \notin [0, 1]$:** en este caso, el denominador $\sin(t) - \lambda$ no se anula para ningún $t \in [0, \pi]$. Esto significa que la función solución $u(t)$ es continua en todo el intervalo, ya que el denominador no se acerca a cero y el numerador $v(t)$ es continua (se aplica la sobreyectividad), y como es única punto a punto por que tenemos su definición (aplica inyectividad), tenemos la función buscada. Por lo tanto, si $\lambda \notin [0, 1]$, entonces $\lambda \in \rho(T)$ (resolvente).

- **Caso** $\lambda \in [0, 1]$: en este caso, el denominador $\sin(t) - \lambda$ se anula en al menos un punto del intervalo $[0, \pi]$, es decir, donde el seno valga exactamente λ

$$\sin(t_0) = \lambda \implies \sin(t_0) - \lambda = 0$$

En este sentido, si tomamos una función $v \in C^0([0, \pi])$ donde $v(\lambda) \neq 0$, el denominador se anula en t_0 y la función solución $u(t)$ se dispara al infinito, lo que rompe la continuidad de $u(t)$ (falla la sobreyectividad). Por lo tanto, si $\lambda \in [0, 1]$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$.

Concluimos por tanto que

$$\sigma(T) = [0, 1]$$

Para demostrar si T es compacto o no, es como suponer que sí lo es, entonces tendríamos la siguiente propiedad de los operadores compactos, lineales y continuos

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\}$$

como esto es una contradicción, y sabemos que $T \in BL(C^0([0, \pi]))$, entonces T no es compacto. Recordemos que la linealidad es trivialmente comprobable, y la continuidad viene dada por saber cual es la norma del operador y saber por tanto que está acotado.

Ejercicio 10.3.5. Sea T el siguiente operador lineal:

$$T(x) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_k x_k, \dots), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_k, \dots) \in \ell_2$$

donde $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$. Demostrar que $T(x) \in \ell_2$, $\forall x \in \ell_2$ y que T es continuo.

Encontrar después todos los valores propios de T y los espacios propios correspondientes. ¿Es el operador T compacto?

Para demostrar que $T(x) \in \ell_2$ para cualquier $x \in \ell_2$, debemos verificar que la serie de los cuadrados de las componentes de $T(x)$ converge, es decir, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k x_k|^2 < \infty$$

para ello veámos el valor de cada α_k

$$|\alpha_k| = \frac{k}{k+1} < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad (10.5)$$

Veámos ahora el desarrollo que buscamos

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k x_k|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 |x_k|^2 \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

donde en $(*)$ hemos usado lo obtenido en (10.5), y sabiendo $\|x\|^2 < \infty$ porque $x \in \ell_2$ tenemos lo buscado, es decir, $T(x) \in \ell_2$.

Para demostrar que T es continuo, basta con demostrar que T es acotado, es decir, que existe una constante $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in \ell_2$. En la Parte 1 acabamos de obtener directamente que

$$\|T(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \implies \|T(x)\| \leq 1 \cdot \|x\| \quad \forall x \in \ell_2$$

donde queda demostrada la continuidad de T .

Nos centraremos ahora en buscar los valores propios y los subespacios propios asociados. Por definición, un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T si existe un vector no nulo $x \neq 0$ en ℓ_2 tal que

$$T(x) = \lambda x$$

Planteamos la ecuación componente a componente

$$(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_k x_k, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k, \dots) \implies (\alpha_k - \lambda)x_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Para cada componente k , para que esta ecuación se cumpla, tenemos dos opciones: o bien $x_k = 0$, o bien $\lambda = \alpha_k$. Como buscamos un vector propio $x \neq 0$, al menos una componente tiene que ser distinta de cero (digamos, la componente número j , $x_j \neq 0$). Si $x_j \neq 0$, la ecuación nos obliga a que

$$\lambda = \alpha_j = \frac{j}{j+1}$$

Por lo tanto, los valores propios de T son exactamente los elementos de la sucesión $\{\alpha_k\}$

$$\lambda_k = \frac{k}{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \implies e(T) = \left\{ \frac{k}{k+1} : k \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

Si fijamos un valor propio λ_k , sabemos que el vector $x \in \ell_2$ en la componente k puede tomar cualquier valor, pero para el resto de componentes $j \neq k$ debemos tener la igualdad

$$(\alpha_j - \lambda_k)x_j = 0 \implies x_j = 0 \quad \forall j \neq k$$

de donde deducimos que para cada componente k , el espacio propio asociado a λ_k es

$$V_k = \ker(T - \lambda_k I) = \text{span}\{e_k\} = \{(0, \dots, 0, c, 0, \dots) : c \in \mathbb{C}\}$$

Comprobemos ahora si T es compacto o no. Para ello, vamos a demostrar que no es compacto usando la base ortonormal canónica de ℓ_2 , $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$, la cual sabemos que está acotada porque $\|e_n\| = 1$ para todo n .

Si aplicamos el operador T a los elementos de esta base, dado que $e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ tiene un 1 en la posición n , el operador simplemente lo multiplica por su correspondiente α_n

$$T(e_n) = \alpha_n e_n = \frac{n}{n+1} e_n$$

por lo que debemos demostrar que de esta sucesión de imágenes $\{T(e_n)\}$ es imposible extraer ninguna subsucesión que converja fuertemente (en norma). Calculemos la

distancia al cuadrado entre dos términos distintos cualesquiera de la sucesión de imágenes, $T(e_n)$ y $T(e_m)$ (con $n \neq m$)

$$\begin{aligned}\|T(e_n) - T(e_m)\|^2 &= \|(\alpha_n - \alpha_m)e_n + \alpha_m(e_n - e_m)\|^2 = \\ &= (\alpha_n e_n - \alpha_m e_m, \alpha_n e_n - \alpha_m e_m) = |\alpha_n|^2 \|e_n\|^2 + |\alpha_m|^2 \|e_m\|^2 = \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{m}{m+1}\right)^2\end{aligned}$$

donde si pasamos a cuando $k, m \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|T(e_n) - T(e_m)\|^2 = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 = 2 \implies \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|T(e_n) - T(e_m)\| = \sqrt{2} \neq 0$$

lo que demuestra que los términos de la sucesión de imágenes, a medida que avanzamos en el infinito, se estabilizan a una distancia fija de $\sqrt{2}$ entre sí, y por tanto no es posible extraer ninguna subsucesión que converja fuertemente, lo que implica que T no es compacto.

Ejercicio 10.3.6. Sea $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ definido por:

$$T(x) = \left(x_1, x_2, 0, \frac{x_3}{2^3}, \frac{x_4}{2^4}, \dots, \frac{x_n}{2^n}, \dots\right)$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2.$$

- i) Demostrar que T es compacto
- ii) Determinar el espectro de T , los posibles valores propios y los correspondientes espacios propios.

Antes de resolver el ejercicio, es importante notar que T es lineal y continuo, donde la linealidad es trivial y la continuidad se puede demostrar fácilmente usando la acotación de la siguiente manera.

Recordemos que ser acotado significa que

$$\exists C > 0 : \|T(x)\|_2 \leq C \|x\|_2 \quad \forall x \in \ell_2$$

Vamos a calcular la norma de $T(x)$ al cuadrado

$$\|T(x)\|_2^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 0^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left|\frac{x_n}{2^n}\right|^2$$

Como todos los denominadores 2^n son mayores o iguales que 1, es evidente que cada fracción $\frac{1}{(2^n)^2} \leq 1$. Por lo tanto, podemos quitar los denominadores y la desigualdad se mantiene hacia arriba:

$$\|T(x)\|_2^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + \sum_{n=3}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_2^2$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados obtenemos:

$$\|T(x)\|_2 \leq 1 \cdot \|x\|_2 \implies \|T\| \leq 1$$

Como la norma del operador está acotada (es finita), T es un operador continuo.

- i) Vamos a demostrar la compacidad de T aproximandolo por operadores de rango finito. Para cada $k \geq 3$, definimos el operador T_k que copia a T hasta la componente k y a partir de ahí pone ceros

$$T_k(x) = \left(x_1, x_2, 0, \frac{x_3}{2^3}, \dots, \frac{x_{k-1}}{2^{k-1}}, 0, 0, \dots \right)$$

Como la imagen de T_k tiene como máximo dimensión k (dimensión finita), T_k es un operador de rango finito y, por tanto, es automáticamente compacto. Restamos ambos operadores

$$(T - T_k)(x) = \left(0, \dots, 0, \frac{x_k}{2^k}, \frac{x_{k+1}}{2^{k+1}}, \dots \right)$$

Evaluamos su norma en ℓ_2 al cuadrado

$$\|(T - T_k)(x)\|_2^2 = \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{x_n}{2^n} \right|^2 = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^2} |x_n|^2 \leq \frac{1}{(2^k)^2} \sum_{n=k}^{\infty} |x_n|^2$$

Como la última suma es menor o igual que la norma total $\|x\|_2^2$, acotamos

$$\|(T - T_k)(x)\|_2^2 \leq \frac{1}{4^k} \|x\|_2^2 \implies \|(T - T_k)(x)\|_2 \leq \frac{1}{2^k} \|x\|_2$$

Por la definición de la norma de un operador

$$\|T - T_k\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T - T_k)(x)\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{1}{2^k}$$

Si tomamos el límite cuando $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T - T_k\| = 0$$

Como T es el límite en norma de una sucesión de operadores compactos (T_k) y el espacio de operadores compactos es cerrado, T es un operador compacto, como se quería demostrar.

- ii) Primero intentaremos obtener los posibles valores propios de T , y sus subespacios propios asociados. Para ello planteamos la ecuación general $(T - \lambda I)x = 0$ componente a componente

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_1 = 0 \implies (1 - \lambda)x_1 = 0 \\ x_2 - \lambda x_2 = 0 \implies (1 - \lambda)x_2 = 0 \\ 0 - \lambda x_3 = 0 \implies -\lambda x_3 = 0 \\ \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} - \lambda x_n = 0 \quad \text{para } n \geq 4 \end{cases}$$

Recordemos una cosa de vital importancia, lo que realmente estamos buscando son los valores de λ para los cuales existe un vector $x \neq 0$ que cumple esta ecuación. Es decir, estamos buscando los valores de λ para los cuales el núcleo $\ker(T - \lambda I)$ tiene más elementos que el cero.

Dicho esto, veámos los distintos casos para λ :

- **Caso $\lambda = 1$:** de las ecuaciones (1) y (2) obtenemos $0 \cdot x_1 = 0$ y $0 \cdot x_2 = 0$. Esto significa que x_1 y x_2 pueden ser cualquier número. Las demás componentes se obligan a ser 0. Por tanto, $\lambda = 1$ es un valor propio. El espacio propio asociado es:

$$V_1 = \ker(T - I) = \text{span}\{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots)\} = \text{span}\{e_1, e_2\}$$

- **Caso $\lambda = 0$:** de la ecuación (3) obtenemos $0 \cdot x_3 = 0$. Esto significa que x_3 puede ser cualquier número. Sustituyendo en las demás ecuaciones con $\lambda = 0$, tenemos lo siguiente:
 - De (1): $x_1 = 0$.
 - De (2): $x_2 = 0$.
 - De (4): $\frac{x_3}{2^3} = 0 \implies x_3 = 0$, por lo que en esta ecuación, se nos obliga a que x_3 también sea 0.

Si continuamos despejando, veremos que todas las componentes se hacen cero, por lo que para $\lambda = 0$, el único vector que cumple la ecuación es el $x = 0$, y por tanto 0 NO es un valor propio.

- **Caso $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0$:** de (1) y (2) se deduce que $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. De (3) se deduce que $x_3 = 0$. Usando la fórmula recursiva (4), como todas las anteriores son cero, todas las componentes siguientes se anulan. Solo existe la solución trivial $x = 0$.

El único valor propio es $\sigma_p(T) = \{1\}$, y su espacio propio asociado es

$$V_1 = \text{span}\{e_1, e_2\}$$

Ahora nos centraremos en obtener el **espectro** de T , donde de primeras ya sabemos que

$$e(T) = \{1\} \subseteq \sigma(T)$$

y además por ser ℓ_2 dimensión infinita y T compacto sabemos que $0 \in \sigma(T)$.

Tomemos ahora $\lambda \neq 0, 1$ y vamos a intentar despejar de forma única el vector x en función de y , recordando primero que la ecuación general es $(T - \lambda I)x = y$, es decir, que

$$\left((1 - \lambda)x_1, (1 - \lambda)x_2, -\lambda x_3, \left(\frac{x_3}{2^3} - \lambda x_4\right), \dots, \left(\frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} - \lambda x_n\right), \dots \right) = (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots)$$

Despejando cada componente x_n de forma única, obtenemos:

- $x_1 = \frac{y_1}{1 - \lambda}$
- $x_2 = \frac{y_2}{1 - \lambda}$
- $x_3 = \frac{y_3}{-\lambda}$
- $x_n = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} - y_n \right) \quad \text{para } n \geq 4$

como $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0$, los denominadores nunca se anulan (el despeje es único, luego es inyectivo). Además, debido a que dividimos sucesivamente por 2^{n-1} , los términos x_n decrecen rapidísimo geométricamente. Eso garantiza que para cualquier $y \in \ell_2$, la serie de x va a converger, quedándose dentro de ℓ_2 (es sobreyectivo). Al ser inyectivo y sobreyectivo, el operador es biyectivo, por lo que todos estos valores de λ están en el resolvente $\rho(T)$, lo que significa que el espectro es

$$\sigma(T) = \{0, 1\}$$

10.4. Folio 4

Ejercicio 10.4.1. Sea X un espacio de Banach y $T \in BL(X)$. Consideramos el polinomio:

$$P(t) = 1 + 2t + 3t^2$$

y el operador

$$P(T) = I + 2T + 3T^2$$

donde I es la identidad.

Demostrar las siguientes afirmaciones:

- i) si λ es un valor propio de T , entonces $P(\lambda)$ es un valor propio de $P(T)$
- ii) $P(\sigma(T)) \subseteq \sigma(P(T))$ $[\sigma(\cdot)$ es el espectro].

Sugerencia: razonar por contradicción.

Ejercicio 10.4.2. Sea $X = C^1([0, 1])$ y definimos en él la norma:

$$\|u\|_0 = |u(0)| + \|u'\|_\infty \quad \forall u \in X,$$

- i) ¿el espacio normado $(X, \|u\|_0)$ es completo? (Motivar la respuesta)
- ii) Demostrar que $\|\cdot\|_0$ es una norma equivalente a la norma usual en X definida por:

$$\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty.$$

Para realizar la demostración de ambos enunciados, comenzaremos con el enunciado (ii) para después usar este para demostrar el (i). Antes de nada recordemos como viene dada la norma del infinito

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)| \quad \forall u \in C^1([0, 1])$$

(se suele escribir $\sup$, pero como sabemos que es continua y en intervalo cerrado y acotado da igual)

- (ii) Recordemos que dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ en un espacio vectorial X son equivalentes si existen dos constantes positivas $\alpha, \beta > 0$ tales que para cualquier elemento $u \in X$ se cumple la doble desigualdad

$$\alpha\|u\|_b \leq \|u\|_a \leq \beta\|u\|_b$$

Queremos ver que esto ocurre entre nuestra norma propuesta $\|u\|_0 = |u(0)| + \|u'\|_\infty$ y la norma usual $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$.

- Para la primera desigualdad, sabemos que para cualquier función continua $u \in C^1([0, 1])$, el valor absoluto de la función evaluada en el punto 0, $|u(0)|$, nunca puede superar al máximo valor absoluto que toma la función en todo el intervalo, el cual es por definición la norma infinito $\|u\|_\infty$.

Por lo tanto, de forma directa

$$|u(0)| \leq \|u\|_\infty \implies |u(0)| + \|u'\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$$

esto demuestra la primera parte de la equivalencia eligiendo como constante $\alpha = 1$

$$\|u\|_0 \leq 1 \cdot \|u\|$$

- Para la segunda desigualdad, vamos a el TFC (Teorema Fundamental del Cálculo) para funciones derivables, que nos dice que para cualquier función $u \in C^1([0, 1])$ y para cualquier punto $x \in [0, 1]$, se cumple la siguiente igualdad

$$\int_0^x u'(t) dt = u(x) - u(0) \implies u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt$$

y veremos ahora las siguientes desigualdades tomando $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(0)| + \left| \int_0^x u'(t) dt \right| \leq |u(0)| + \int_0^x |u'(t)| dt \stackrel{(*)}{\leq} |u(0)| + \int_0^x \|u'\|_\infty dt = \\ &= |u(0)| + \|u'\|_\infty \cdot x \stackrel{(**)}{\leq} |u(0)| + \|u'\|_\infty = \|u\|_0 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $|u'(t)| \leq \|u'\|_\infty$ para todo $t \in [0, 1]$, y en $(**)$ hemos usado que $x \in [0, 1]$. Demostrada la desigualdad anterior tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &= \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)| \leq \|u\|_0 \implies \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty \leq \|u\|_0 + \|u'\|_\infty \stackrel{(*)}{\leq} 2\|u\|_0 \implies \\ &\implies \frac{1}{2}\|u\| \leq \|u\|_0 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\|u'\|_\infty \leq |u(0)| + \|u'\|_\infty = \|u\|_0$, y tenemos finalmente la otra desigualdad buscada.

- (i) Intuitivamente podemos ver que dadas dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ equivalentes en un espacio vectorial X . Entonces, el espacio normado $(X, \|\cdot\|_a)$ es completo si y solo si el espacio normado $(X, \|\cdot\|_b)$ es completo.

Sabiendo ya que $X = C^1([0, 1])$ dotado de su norma usual $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ es un espacio de Banach estándar (su completitud se hereda de que el espacio de funciones continuas $C([0, 1])$ con la norma supremo es completo), entonces es claro que

$$(X, \|\cdot\|_0) \text{ es completo}$$

Ejercicio 10.4.3. Sea $\{F_n : \ell_2 \longrightarrow \mathbb{R}\}$ la sucesión de funcionales definidos por:

$$F_n(x) = x_{n+1} + x_{n+2} \quad \text{si } x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2.$$

Demostrar que los funcionales F_n son lineales y continuos y que F_n converge *-débilmente a cero, pero $\{F_n\}$ no converge a cero en $(\ell_2)^*$.

Ejercicio 10.4.4. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ un sistema ortonormal completo en un espacio de Hilbert. Sea T el operador de H en H definido por:

$$T(x) = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \cdots + \alpha_n e_{n+1} + \cdots$$

para $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$. Demostrar que T es una isometría y encontrar su operador adjunto.

Recordemos que un operador $T : H \longrightarrow H$ es una isometría si conserva la norma de todos los vectores del espacio, es decir, si se cumple

$$\|T(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in H$$

Dado que $\{e_n\}$ es un sistema ortonormal completo, cualquier vector $x \in H$ se puede escribir en términos de su serie de Fourier abstracta

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (x, e_n) e_n$$

donde $\alpha_n = (x, e_n)$ para cada n . Recordemos ahora la identidad de Parseval que dice

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

por lo que aplicandolo a nuestra imagen tendríamos

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(T(x), e_n)|^2$$

Veámos el resultado para cada n :

- **Caso $n = 1$:** tenemos

$$(T(x), e_1) = (\alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \cdots, e_1) = 0$$

porque e_1 es ortogonal a todos los demás e_n con $n \geq 2$.

- **Caso $n \geq 2$:** tenemos

$$(T(x), e_n) = (\alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \cdots + \alpha_{n-1} e_n + \cdots, e_n) = \alpha_{n-1} = (x, e_{n-1})$$

por lo que tenemos

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(T(x), e_n)|^2 = |0|^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} |(T(x), e_n)|^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} |\alpha_{n-1}|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2$$

y se tiene demostrado lo que se quería.

Por definición, el operador adjunto T^* es el único operador lineal y acotado que satisface la identidad del producto escalar

$$(T(x), y) = (x, T^*(y)) \quad \forall x, y \in H$$

Para deducir su fórmula, vamos a tomar dos vectores genéricos de nuestro espacio expresados en la base de Hilbert

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n, \quad y = \sum_{m=1}^{+\infty} \beta_m e_m$$

Desarrollemos el lado izquierdo de la identidad utilizando la definición de $T(x)$ y las propiedades de linealidad del producto escalar

$$(T(x), y) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_{n+1}, \sum_{m=1}^{+\infty} \beta_m e_m \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_n \overline{\beta_m} (e_{n+1}, e_m) \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \overline{\beta_{n+1}}$$

donde en $(*)$ hemos usado que el producto interno es 0 siempre excepto cuando $m = n + 1$, y si desarrollamos un poco para igualarlo a un producto interno tendríamos

$$(T(x), y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \overline{\beta_{n+1}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n, \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{n+1} e_n \right) = \left(x, \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{n+1} e_n \right)$$

por lo que el operador adjunto T^* viene definido de la siguiente manera

$$T^*(y) = \beta_2 e_1 + \beta_3 e_2 + \dots + \beta_{n+1} e_n + \dots \quad \text{para } y = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e_n$$

Ejercicio 10.4.5. Sea el siguiente operador

$$\begin{aligned} T : \quad \ell_2 &\longrightarrow \ell_2 \\ (x_1, \dots, x_n, \dots) &\longmapsto (x_1, x_2, 0, 0, x_4, x_5, \dots, x_n, \dots) \end{aligned}$$

Determinar el espectro de T . Identificar los posibles valores propios y los correspondientes espacios propios. ¿Es el operador T compacto?

Antes de nada es importante notar que T es trivialmente lineal y para la continuidad se ve tan fácil como sigue sabiendo la equivalencia con la acotación

$$\|T(x)\|_2^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 0^2 + 0^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2 + \dots \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_2^2$$

tomando la raíz, tenemos $\|T(x)\|_2 \leq 1 \cdot \|x\|_2 \implies \|T\| \leq 1$. El operador es acotado (continuo).

Pensemos en lo que hace T . Deja fijas infinitas componentes $(x_1, x_2, x_4, x_5, \dots)$. Los operadores compactos en dimensión infinita tienen que “aplstar” o encoger las infinitas dimensiones hacia el cero (como el $\frac{1}{n}$ o el $\frac{1}{2^n}$ de los ejercicios anteriores). Si un operador deja intactas infinitas dimensiones, no puede ser compacto, por lo que

nuestra idea será demostrar que NO es compacto.

Supongamos por reducción al absurdo que T es compacto. Consideremos la sucesión de vectores de la base canónica $\{e_n\}_{n \geq 5} \subseteq \ell_2$, donde $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ con el 1 en la posición n . Sabemos que:

- Esta sucesión está acotada porque $\|e_n\|_2 = 1$ para todo n .
- Si aplicamos el operador a partir de $n \geq 5$, el operador los deja completamente idénticos: $T(e_n) = e_n$.

Por definición de operador compacto, si una sucesión está acotada, su imagen $\{T(e_n)\}$ debe contener una subsucesión convergente. En nuestro caso, la sucesión de imágenes es la propia $\{e_n\}_{n \geq 5}$. Veamos la distancia entre dos elementos cualesquiera de esta sucesión de imágenes ($n \neq m$ con $n, m \geq 5$)

$$\|T(e_n) - T(e_m)\|_2^2 = \|e_n - e_m\|_2^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 \implies \|T(e_n) - T(e_m)\|_2 = \sqrt{2}$$

como la distancia entre cualquier par de términos es siempre una constante fija ($\sqrt{2}$), es imposible extraer ninguna subsucesión que sea de Cauchy y que pueda converger, por lo que T no es compacto.

Ahora estudiaremos los valores propios y los subespacios propios asociados. Para encontrar los valores propios, planteamos la ecuación de autovalores $T(x) = \lambda x$ para un vector no nulo $x \neq 0$. Lo escribimos componente a componente para ver qué pasa:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_1 \implies (1 - \lambda)x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda x_2 \implies (1 - \lambda)x_2 = 0 \\ 0 = \lambda x_3 \implies \lambda x_3 = 0 \\ 0 = \lambda x_4 \implies \lambda x_4 = 0 \\ x_{n-1} = \lambda x_n \text{ para } n \geq 5 \end{cases}$$

Analizando este sistema tan sencillo, vemos que solo hay dos números candidatos que pueden generar soluciones no nulas:

- **Caso $\lambda = 1$:** sustituyendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones, obtenemos que $0 \cdot x_1 = 0$ y $0 \cdot x_2 = 0$, lo que significa que x_1 y x_2 pueden ser cualquier número. Sin embargo, las ecuaciones para x_3 y x_4 se convierten en $0 = 0$, lo que significa que x_3 y x_4 deben ser nulos.
Por último, de la ecuación (5) para $n = 5$, tenemos que $x_4 = 1 \cdot x_5$. Como sabemos que $x_4 = 0$, entonces obligatoriamente $x_5 = 0$, y así ocurre sucesivamente para $n \geq 6$, obteniendo por tanto, que todos deben ser nulos excepto x_1 y x_2 , es decir, el subespacio propio asociado es el siguiente

$$V_1 = \ker(T - I) = \text{span}\{e_1, e_2\}$$

- **Caso $\lambda = 0$:** sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones, obtenemos que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_n = 0$ para todo $n \geq 4$. Sin embargo, las ecuaciones para x_3 y x_4 se convierten en $0 = 0$, lo que significa que x_3 y x_4 pueden ser cualquier número.

De la ecuación (5) sustituyendo $\lambda = 0$, tenemos que $x_{n-1} = 0 \cdot x_n \implies x_{n-1} = 0$ para $n \geq 5$. Esto significa que $x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, \dots$, aquí se obliga a $x_4 = 0$, pero x_3 no se obliga a ser cero, por lo que el espacio propio asociado a $\lambda = 0$ es el siguiente

$$V_0 = \ker(T) = \text{span}\{e_3\}$$

- **Caso $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0$:** sustituyendo estos valores en las ecuaciones, obtenemos que $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$, y $x_n = 0$ para todo $n \geq 5$. Por tanto, la única solución es el vector nulo, lo que significa que no hay más valores propios.

Los valores propios son exactamente $e(T) = \{0, 1\}$.

Estudiaremos ahora el espectro de T . Tomemos ahora $\lambda \neq 0, 1$ y vamos a intentar despejar de forma única el vector x en función de y , recordando primero que la ecuación general es $(T - \lambda I)x = y$, es decir, que

$$((1 - \lambda)x_1, (1 - \lambda)x_2, -\lambda x_3, -\lambda x_4, x_4 - \lambda x_5, \dots, x_{n-1} - \lambda x_n, \dots) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \dots)$$

Despejando cada componente x_n de forma única, obtenemos:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x_1 &= \frac{y_1}{1 - \lambda} \\ \blacksquare \quad x_2 &= \frac{y_2}{1 - \lambda} \\ \blacksquare \quad x_3 &= \frac{y_3}{-\lambda} \\ \blacksquare \quad x_4 &= \frac{y_4}{-\lambda} \\ \blacksquare \quad x_n &= \frac{x_{n-1} - y_n}{\lambda} \implies x_n = -\frac{y_4}{\lambda^{n-3}} - \sum_{k=5}^n \frac{y_k}{\lambda^{n-k+1}} \quad \text{para } n \geq 5 \end{aligned}$$

como $\lambda \neq 0, 1$, este despeje sigue siendo completamente único componente a componente (garantiza la inyectividad). Ahora tenemos que ver si exactamente ese x despedido pertenece a ℓ_2 para cada $y \in \ell_2$, para ello veremos dos casos

- **Caso $|\lambda| \leq 1$:** para demostrar que el operador no es sobreyectivo, basta con encontrar un único vector $y \in \ell_2$ cuya solución x quede fuera de ℓ_2 . Tomamos el vector de la base canónica

$$y = e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_2$$

Sustituyendo sus componentes ($y_4 = 1$ y el resto 0) en nuestra fórmula general de la solución para $n \geq 4$

$$x_n = -\frac{1}{\lambda^{n-3}}$$

Ahora veremos si x pertenece a ℓ_2 o no, para ello evaluamos su norma al cuadrado

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=4}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{2(n-3)}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|^2} \right)^m$$

Como $|\lambda| \leq 1$, entonces $\frac{1}{|\lambda|^2} \geq 1$, por lo que la serie no converge, lo que significa que $x \notin \ell_2$. Por tanto, el operador no es sobreyectivo, lo que implica que λ pertenece al espectro $\sigma(T)$.

- **Caso** $|\lambda| > 1$: es más complejo.

Lo que haremos es sabiendo que ℓ_2 es espacio de Hilbert, aplicaremos que sabemos que

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$$

y con el caso $|\lambda| \leq 1$ ya quedaría demostrada la igualdad del espectro. Para ello veámos la norma del operador (recordemos que al principio ya demostramos que $\|T\| \leq 1$). Para probar que la norma es exactamente 1, basta con testear un vector con norma 1 que no se altere, por ejemplo el primer vector canónico $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$. Como $\|e_1\|_2 = 1$ y $T(e_1) = e_1$, tenemos que $\|T(e_1)\|_2 = 1$. Por definición de norma de un operador, concluimos que:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|_2} \geq \frac{\|T(e_1)\|_2}{\|e_1\|_2} = 1$$

y se tiene finalmente que

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$$

Ejercicio 10.4.6. Sea X un espacio de Banach y $T \in BL(X)$. Demostrar que $\lambda \in \rho(T)$ (resolvente de T) si y solo si:

- (i) $(T - \lambda I)(X)$ es denso en X
- (ii) $\exists \alpha > 0 : \|(T - \lambda I)(x)\| = \|T(x) - \lambda x\| \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in X$

Para simplificar la escritura en toda la demostración y que la notación no nos emborrache, vamos a definir el operador intermedio

$$A = T - \lambda I$$

donde claramente como $T \in BL(X)$ e $I \in BL(X)$, su resta también es un operador lineal y acotado ($A \in BL(X)$). Con esta notación lo que se nos pide demostrar es lo siguiente

$$\lambda \in \rho(T) \iff A(X) \text{ es denso en } X \quad \text{y} \quad \exists \alpha > 0 : \|Ax\| \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in X$$

Lo veremos por doble implicación.

$\implies$) Sea $\lambda \in \rho(T)$, entonces A es biyectiva, veámos como probar (i) y (ii):

- (i) Como A es sobreyectiva, entonces $A(X) = \overline{A(X)} = X$, lo que implica que $A(X)$ es denso en X .

(ii) Como A biyectiva, existe su inversa

$$A^{-1} : X \longrightarrow X$$

y por teorema de la aplicación abierta sabemos que A^{-1} es continua, lo que implica que está acotada, es decir, tenemos

$$\|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y\| \quad \forall y \in X$$

donde $\|A^{-1}\| > 0$. Haciendo el cambio $y = Ax$ (lo cual es válido porque A es biyectiva), tenemos $A^{-1}y = x$. Sustituyendo

$$\|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \implies \|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \|x\|$$

Definiendo $\alpha = \frac{1}{\|A^{-1}\|} > 0$, obtenemos la condición (ii): $\|Ax\| \geq \alpha \|x\|$.

$\Leftarrow$) Supongamos que se cumplen las condiciones (i) y (ii). Para demostrar que $\lambda \in \rho(T)$, es decir, que A es biyectiva, tenemos que demostrar que A es inyectiva y sobreyectiva.

- **Inyectividad:** queremos ver que si $Ax = 0 \implies x = 0$ (por ser A lineal). Usamos la condición (ii)

$$0 = \|0\| = \|Ax\| \geq \alpha \|x\|$$

Como $\alpha > 0$, la única forma de que $\alpha \|x\| \leq 0$ es que $\|x\| = 0$, lo que significa que $x = 0$. Por tanto, A es inyectiva.

- **Sobreyectividad:** lo que primero probaremos aquí es que la imagen es un conjunto cerrado, es decir, $A(X) = \overline{A(X)}$, puesto que entonces tomando (i), ya sabemos que es sobreyectiva, puesto que por ser denso en X , tenemos

$$A(X) = \overline{A(X)} = X$$

Tomamos una sucesión de elementos en la imagen, $y_n = Ax_n \in A(X)$, tal que $y_n \rightarrow y$ (en norma) en X . Queremos ver que el límite y pertenece a $A(X)$. Como y_n converge, es una sucesión de Cauchy, por lo que

$$\|y_n - y_m\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n, m \rightarrow \infty$$

Usando la condición (ii) y la linealidad de A

$$\|y_n - y_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \geq \alpha \|x_n - x_m\|$$

entonces tenemos que

$$\|y_n - y_m\| \rightarrow 0 \implies \alpha \|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \xrightarrow{(*)} \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$$

donde en (*) hemos usado que $\alpha > 0$. Esto significa que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X , y como X completo entonces $\{x_n\}$ converge para algún elemento de X , es decir

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \text{donde } x_0 \in X$$

Al ser A un operador continuo, preserva los límites en norma

$$y_n = Ax_n \rightarrow Ax_0$$

y por unicidad del límite, $y = Ax_0$. Como $x_0 \in X$, concluimos que $y \in A(X)$, por lo que $A(X)$ es cerrado, y por lo explicado al inicio, A sobreyectiva.

Ejercicio 10.4.7. Sea X un espacio normado. Definimos a $\{x_n\}$ como sucesión débilmente de Cauchy en X si

$$\{f(x_n)\} \text{ es una sucesión de Cauchy en } \mathbb{R} \quad \forall f \in X^*$$

Demostrar que toda sucesión débilmente de Cauchy está acotada (en norma) en X .

Sea $f \in X^*$ un funcional cualquiera fijo. Por hipótesis, la sucesión numérica $\{f(x_n)\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy. Dado que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ está acotada, deducimos que para cada funcional f existe una constante real $C_f > 0$ (que depende de f) tal que

$$|f(x_n)| \leq C_f \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (10.6)$$

Para ver más claramente que efectivamente toda sucesión de Cauchy está acotada en $\mathbb{R}$, sabemos primero la definición de dicha sucesión como sigue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

y si tomamos $\varepsilon = 1$, sabemos que existe un subíndice concreto $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N$$

donde tomando $m = N$, tenemos

$$|a_n - a_N| < 1 \quad \forall n \geq N \implies |a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| \quad \forall n \geq N$$

entonces tomamos

$$M = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\} \implies |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Visto este pequeño detalle seguimos con la resolución del ejercicio. Para cada elemento x_n de nuestra sucesión, consideramos su imagen mediante la inyección canónica $J : X \rightarrow X^{**}$. Definimos los funcionales $\xi_n \in X^{**}$ como

$$\xi_n(f) = J(x_n)(f) = f(x_n) \quad \forall f \in X^*$$

Recordemos que la inyección canónica es una isometría, lo que significa que la norma de ξ_n en el bidual es exactamente igual a la norma de x_n en el espacio original

$$\|\xi_n\|_{X^{**}} = \|x_n\|_X$$

Como X espacio normado y $\mathbb{R}$ espacio de Banach, entonces X^{**} es espacio de Banach. Mirando la familia de operadores lineales y continuos $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, evaluemos esta familia de operadores de forma puntual para un elemento $f \in X^*$ cualquiera

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n(f)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)|$$

y como dijimos en la Ecaución (10.6), tenemos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n(f)| \leq C_f < +\infty \quad \forall f \in X^*$$

lo que significa que la familia de operadores $\{\xi_n\}$ está acotada puntualmente sobre el espacio de Banach X^* . Al cumplirse las hipótesis del Principio de Acotación Uniforme (PAU), este teorema nos garantiza que la familia también debe estar acotada uniformemente en norma, es decir

$$\exists M > 0 : \quad \|\xi_n\|_{X^{**}} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \|x_n\|_X = \|\xi_n\|_{X^{**}} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que demuestra formalmente que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada en norma en el espacio X .