

Analisi Funzionale

Examen I

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Analisi Funzionale

Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Joaquín Avilés de la Fuente

Granada, 2025-2026

Asignatura Analisi Funzionale.

Curso Académico 2025-2026.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Profesor Filomena Pacella.

Descripción Examen final escrito de Analisi Funzionale.

Fecha 4 de junio de 2026.

Duración 150 min.

Ejercicio 1 (4 punti). Dimostrare che se X è uno spazio di Banach riflessivo allora:

$$\forall F \in X^* \quad \exists \tilde{x} \in X : \|\tilde{x}\| = 1 \quad \text{e} \quad \|F\| = |F(\tilde{x})|$$

Ejercicio 2 (5 punti). Siano X e Y spazi normati e $T : X \rightarrow Y$ una applicazione lineare e chiusa. Dimostrare:

(i) se T è biettiva allora

$$T^{-1} : Y \rightarrow X$$

è lineare e chiusa.

(ii) se $K \subseteq X$ è compatto allora $T(K)$ è chiuso in Y .

Ejercicio 3 (4 punti). Siano X e Y spazi di Banach e $T \in BL(X, Y)$. Dimostrare che se T è compatto allora:

$$x_n \rightharpoonup x_0 \text{ in } X \implies T(x_n) \rightarrow T(x_0)$$

Ejercicio 4 (4 punti). Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e

$$T : H \rightarrow H$$

un operatore lineare e compatto. Dimostrare che $\nexists \alpha > 0$ tale che:

$$(T(x), x) \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in H$$

Ejercicio 5 (8 punti). Sia X uno spazio di Banach e $T \in BL(X)$. Definiamo $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore approssimato di T se:

$$\exists \{x_n\} \subset X : \|x_n\| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{e} \quad T(x_n) - \lambda x_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Dimostrare che:

(i) ogni autovalore di T è anche autovalore approssimato di T .

(ii) ogni autovalore approssimato di T appartiene allo spettro di T .

Ejercicio 6 (8 punti). Sia $T : C^0([1, e]) \rightarrow C^0([1, e])$ definito da:

$$T(u)(t) = (\log t) u(t), \quad \forall t \in [1, e], \quad \forall u \in C^0([1, e])$$

Determinare lo spettro di T , gli eventuali autovalori e i relativi autospazi. L'operatore T è compatto?