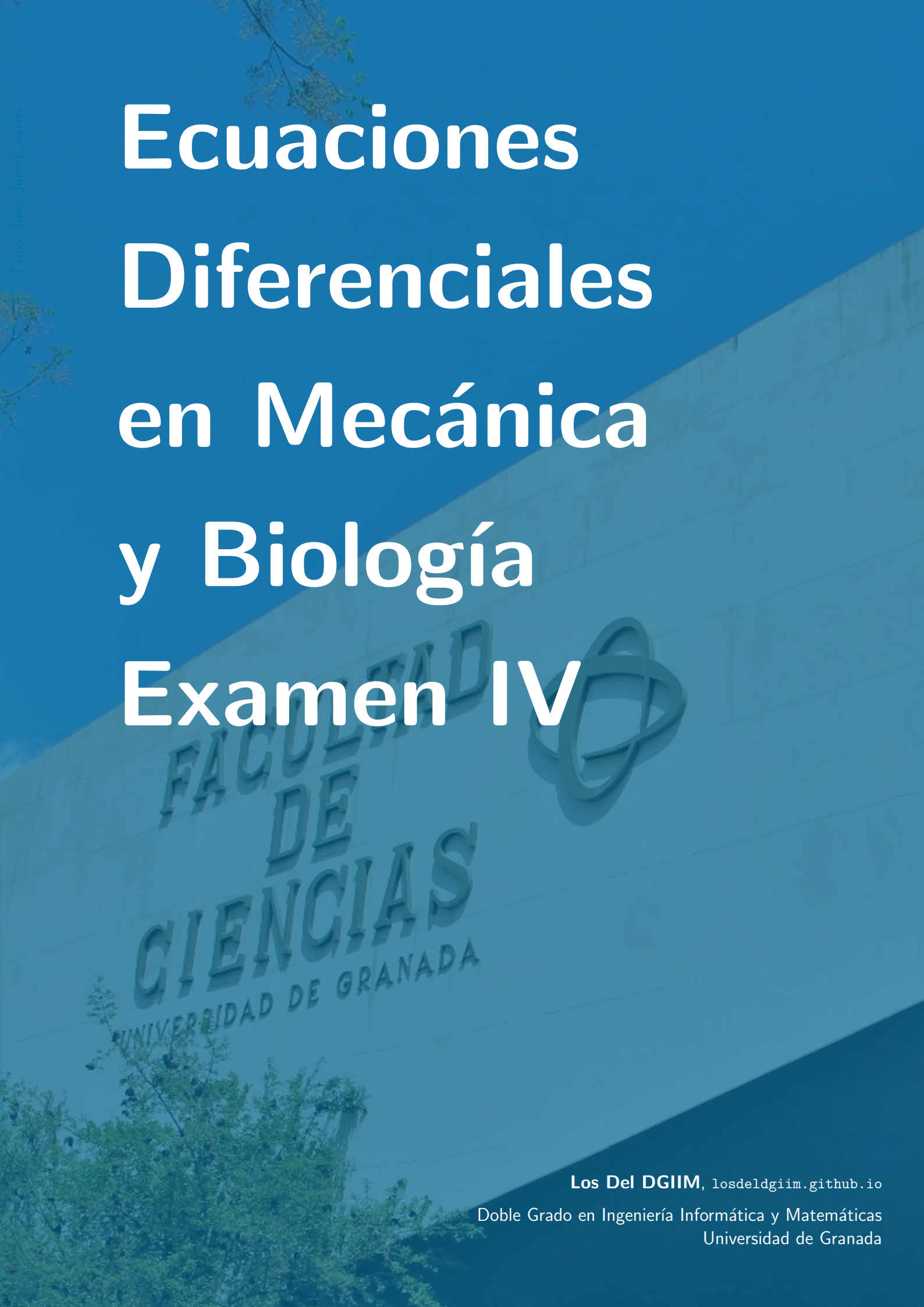
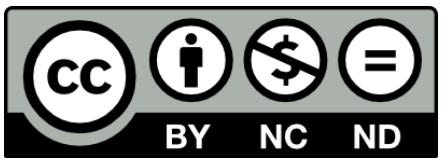
Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología Examen IV



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología.

Curso Académico 2025-26.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Parcial 1.

Ejercicio 1. Calcule la única solución clásica del siguiente problema de transporte lineal

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(0,x) = x \end{cases}$$

Ejercicio 2. Define el concepto de solución débil en el problema anterior. ¿Existe? ¿Es única? Justifique su respuesta.

Ejercicio 3. Calcule las trayectorias características y proporcione dos soluciones de la ecuación de Burgers con dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 4 & x > 0 \end{cases}$$

Solución.

Ejercicio 1. Calcule la única solución clásica del siguiente problema de transporte lineal

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(0,x) = x \end{cases} \tag{1}$$

Dado que se nos pide la solución clásica, buscamos aplicar el teorema visto en clase sobre la teoría clásica. En este caso, $\omega(t,x) = 1$, y $u_0(x) = x$. Veamos primero que se cumplen (H1)-(H4):

(H1) Se cumple porque $\omega(t,x)$ es constante, en particular ω es continua en los dos argumentos.

(H2) ω es localmente Lipschitz respecto de x, ya que al ser constante, en particular, es $\omega \in C^1([0,T[\times \mathbb{R})$, luego $C^1_x([0,T[\times \mathbb{R})$, y sabemos por un resultado visto en Ecuaciones Diferenciales II que es l.l. resp. de x. Otra forma sería verlo por definición directamente: para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|\omega(t,x) - \omega(t,y)| = |1-1| = 0 \leqslant L|x-y|$$

Se cumple para todo $L > 0$. De hecho, es globalmente Lipschitz.

(H3) Como $\omega(t,x) = 1$, en particular,

$$|\omega(t,x)| \leqslant 0|x| + 1 = A|x| + B$$

para todo $(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}$, por lo que el crecimiento es sublineal.

(H4) La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial \omega}{\partial x}: & [0,T[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & \dfrac{\partial \omega}{\partial x}(t,x) = 0 \end{array}$$

es constante, luego continua.

Como además es claro que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, el teorema mencionado al principio nos dice que el PVI (1) admite una única solución, $u \in C^1([0,T[\times \mathbb{R})$, que viene dada por

$$u(t,x) = u_0(X(0;t,x))$$

El sistema característico asociado a (1) es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t;s,x) = \omega(t, X(t;s,x)) = 1 \\ X(s;s,x) = x \end{cases} \qquad s \in [0,T[$$

La primera ecuación se resuelve trivialmente por variables separadas (escribimos $X(t) \equiv X(t;s,x)$):

$$X' = 1 \Longrightarrow X(t) = t + C \quad C \in \mathbb{R}$$

e imponiendo la condición inicial $X(s) = x$:

$$s + C = X(s) = x \Longrightarrow C = x - s$$

luego

$$X(t;s,x) = x + t - s$$

y como $X(0;t,x) = x - t$, la única solución clásica de (1) es

$$\boxed{u(t,x) = u_0(X(0;t,x)) = X(0;t,x) = x - t}$$

Ejercicio 2. Define el concepto de solución débil en el problema anterior. ¿Existe? ¿Es única? Justifique su respuesta.

Primero vemos que $\omega \in L^\infty_{loc}([0,T[\times \mathbb{R})$ y $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ya que ambas son continuas, por lo que están acotadas en compactos por el Teorema de Weierstrass, y por tanto, son integrables en compactos, es decir, localmente integrables. Así, una solución débil de (1) es una función $u \in L^1_{loc}([0,T[\times \mathbb{R}^N)$ que verifica

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\omega \cdot \nabla_x)\varphi\right] u \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x) \, dx$$

para todo $\varphi \in C^1_c([0,T[\times \mathbb{R}^N)$. En nuestro caso, $N = 1$, $\omega(t,x) = 1$ y $u_0(x) = x$, luego u debe verificar

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} [\varphi_t + \varphi_x] \, u \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}} x\varphi(0,x) \, dx$$

para todo $\varphi \in C^1_c([0,T[\times \mathbb{R})$. Para la existencia y unicidad utilizamos el teorema visto en clase sobre la teoría débil. Ya hemos visto en el ejercicio anterior que se cumplen (H1)-(H4), y además $\mathrm{div}_x(\omega) = 0$, ya que ω es constante. Como u_0 es en particular $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, por dicho teorema sabemos que existe una única solución débil de (1), y que esta es la misma que hemos obtenido antes:

$$\boxed{u(t,x) = u_0(X(0;t,x)) = x - t}$$

Ejercicio 3. Calcule las trayectorias características y proporcione dos soluciones de la ecuación de Burgers con dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 4 & x > 0 \end{cases}$$

Sabemos por teoría que las soluciones de la ecuación de Burgers (las trayectorias características) son rectas, donde la pendiente la determina la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$, o sea, $X(t;0,x) = x + u_0(x)t$. Así pues:

$$X(t;0,x) = \begin{cases} x + t & x < 0 \\ x + 4t & x > 0 \end{cases}$$

Una solución débil del problema de Riemann (que es el problema de Burgers con un dato inicial con salto) que conocemos es la siguiente:

$$u_1(t,x) = \begin{cases} u^- & x < \lambda t \\ u^+ & x > \lambda t \end{cases}$$

donde $u^- = 1$ y $u^+ = 4$ se obtienen del dato inicial. Se ha visto en teoría que el único valor de λ para que u sea solución (débil) es, aplicando la condición de salto de Rankine-Hugoniot:

$$\lambda = \frac{1}{2}(u^- + u^+) = \frac{1}{2}(1+4) = \frac{5}{2}$$

por lo que ya tenemos una solución del problema de Riemann:

$$\boxed{u_1(t,x) = \begin{cases} 1 & x < 5t/2 \\ 4 & x > 5t/2 \end{cases}}$$

Como además el dato inicial $u_0(x)$ es creciente, sabemos por teoría que tendremos también ondas de rarefacción. Las características ya las hemos obtenido:

$$X(t;0,x) = \begin{cases} x+t & x < 0 \\ x+4t & x > 0 \end{cases}$$

Obtenemos las rectas que delimitan la región de las ondas de rarefacción haciendo $x \to 0$ en ambos lados, y vemos que:

$$\lim_{x\to 0^-} X(t;0,x) = t$$

$$\lim_{x\to 0^+} X(t;0,x) = 4t$$

Así, las fronteras de la región de rarefacción son $x = t$ y $x = 4t$. Las tres regiones que tenemos son $x < t$, $t \leqslant x \leqslant 4t$ y $x > 4t$. Según se ha visto en teoría, las ondas de rarefacción pueden construirse como la solución autosemejante o autosimilar $u(t,x) = x/t$, y teniendo en cuenta los límites ya obtenidos de la región de rarefacción, una segunda solución (en este caso continua para $t > 0$) del problema de este ejercicio es:

$$\boxed{u_2(t,x) = \begin{cases} 1 & x < t \\ \dfrac{x}{t} & t \leqslant x \leqslant 4t \quad t > 0 \\ 4 & x > 4t \end{cases}}$$

En $t = 0$ tenemos la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$.