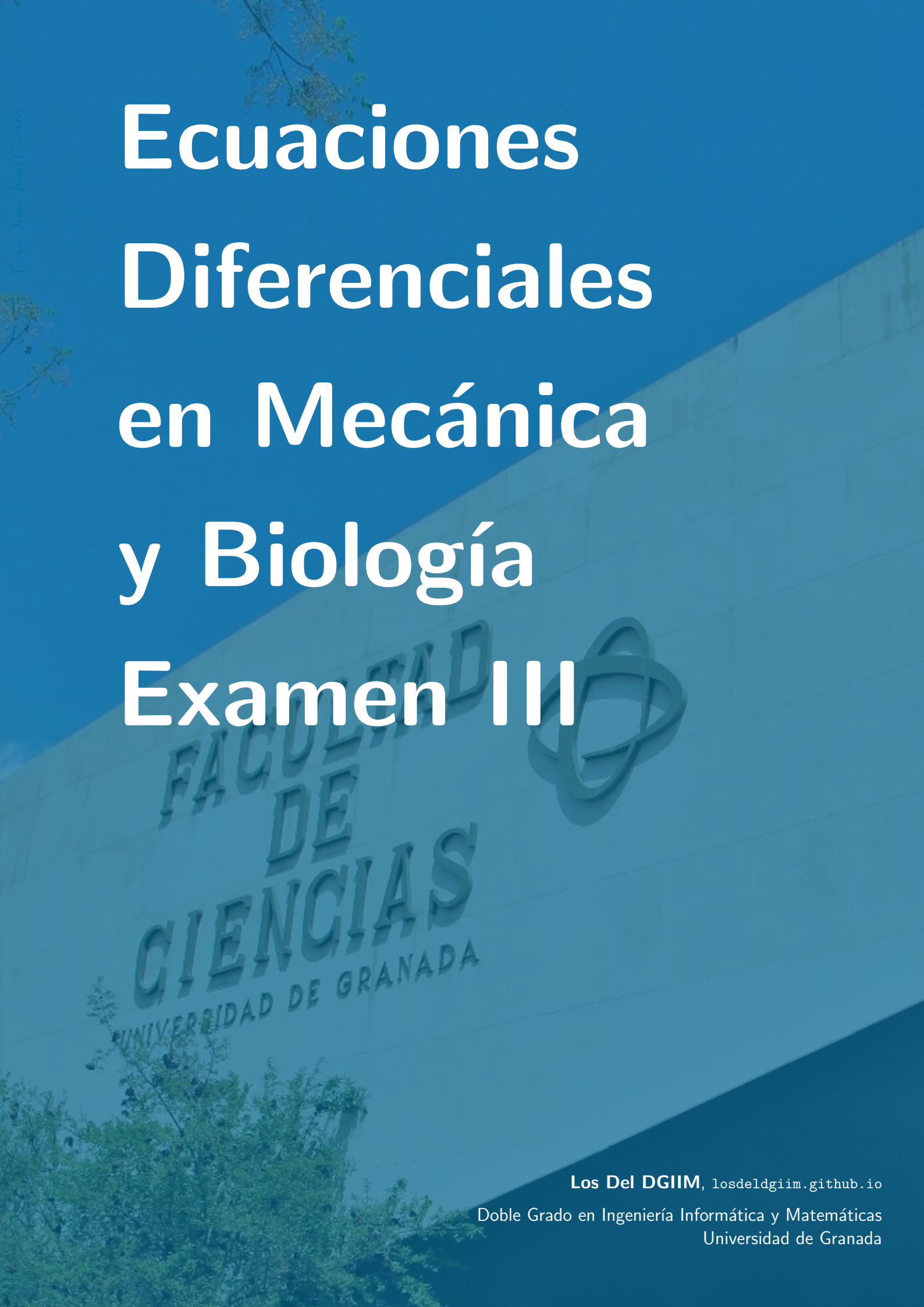
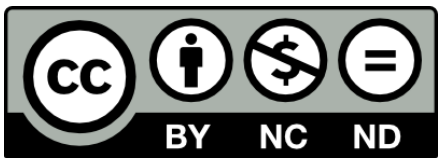
Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología Examen III



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología.

Curso Académico 2024-25.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Parcial 1.

Ejercicio 1. Resuelve el problema

$$\begin{cases} u_t + c^2 u_x = 0 \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

Ejercicio 2. ¿El problema anterior tiene solución débil para $u_0(x)$?

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Si es así, define su solución débil.

Ejercicio 3. Calcule las ondas de choque de la ecuación de Burgers asociada a

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Solución.

Ejercicio 1. Resuelve el problema

$$\begin{cases} u_t + c^2 u_x = 0 \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(x) \end{cases} \tag{1}$$

Sabemos por los dos teoremas vistos en clase correspondientes, que tanto la teoría clásica como la teoría débil nos proporcionan existencia y unicidad de soluciones de (1), y, en caso de verificarse todas las hipótesis, dicha solución única es

$$u(t,x) = u_0(X(0;t,x))$$

Dado que no se especifica si usar la vía clásica o la vía débil para resolver el problema, y que la solución obtenida será la misma (en caso de que se pueda ir por esa vía), optamos por la vía clásica. En este caso, $\omega(t,x) = c^2$, para cierto $c \in \mathbb{R}$, y $u_0(x) = \operatorname{sen}(x)$. Primero vemos que se verifican (H1)-(H4):

(H1) Se cumple porque $\omega(t,x)$ es constante, en particular ω es continua en los dos argumentos.

(H2) ω es localmente Lipschitz respecto de x, ya que $\omega \in C^1([0,T[\times \mathbb{R})$, luego $C^1_x([0,T[\times \mathbb{R})$, y sabemos por un resultado visto en Ecuaciones Diferenciales II que es l.l. resp. de x. Otra forma sería verlo por definición directamente: para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|\omega(t,x) - \omega(t,y)| = |c^2 - c^2| = 0 \leqslant L|x-y|$$

Se cumple para todo $L > 0$. De hecho, es globalmente Lipschitz. para cualquier entorno de (t,x) y (t,y) de la forma $I \times \mathbb{R}$, con $I \subseteq [0,T[$ un intervalo acotado.

(H3) Como $\omega(t,x) = c^2$, en particular,

$$|\omega(t,x)| \leqslant 0|x| + c^2 = A|x| + B$$

para todo $(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}$, por lo que el crecimiento es sublineal.

(H4) La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial \omega}{\partial x}: & [0,T[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & \dfrac{\partial \omega}{\partial x}(t,x) = 0 \end{array}$$

es constante, luego continua.

Como además es claro que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, el teorema mencionado al principio nos dice que el PVI (1) admite una única solución, $u \in C^1([0,T[\times \mathbb{R})$, que viene dada por

$$u(t,x) = u_0(X(0;t,x))$$

El sistema característico asociado a (1) es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t;s,x) = \omega(t, X(t;s,x)) = c^2 \\ X(s;s,x) = x \end{cases} \qquad s \in [0,T[$$

La primera ecuación se resuelve por variables separadas (escribimos $X(t) \equiv X(t;s,x)$):

$$\frac{dX}{dt} = X' = c^2 \Longrightarrow dX = c^2 dt \Longrightarrow X(t) = c^2 t + C \quad C \in \mathbb{R}$$

e imponiendo la condición inicial $X(s) = x$:

$$c^2 s + C = X(s) = x \Longrightarrow C = x - c^2 s$$

luego

$$X(t;s,x) = c^2 t + x - c^2 s = x + c^2(t-s)$$

y como $X(0;t,x) = x - c^2 t$, la única solución (clásica) de (1) es

$$\boxed{u(t,x) = u_0(X(0;t,x)) = \operatorname{sen}(x - c^2 t)}$$

Ejercicio 2. ¿El problema anterior tiene solución débil para $u_0(x)$?

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Si es así, define su solución débil.

Para ver si tiene solución débil, veamos si se verifican las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de soluciones débiles de (1). Ya hemos visto en el ejercicio anterior que se cumplen (H1)-(H4), y además $\operatorname{div}_x(\omega) = 0$, ya que ω es constante. Como u_0 es en particular $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (lo vemos cuando se defina el concepto de solución débil), por dicho teorema sabemos que existe una única solución débil de (1), y que esta tiene la misma forma que la hemos obtenido antes, pero ahora el dato inicial $u_0(x)$ es distinto, por lo que:

$$u_0(X(0;t,x)) = \begin{cases} 0 & X(0;t,x) < 0 \\ 1 & X(0;t,x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x - c^2 t < 0 \\ 1 & x - c^2 t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < c^2 t \\ 1 & x > c^2 t \end{cases}$$

Teniendo esto último en cuenta, la solución será

$$\boxed{u(t,x) = u_0(X(0;t,x)) = \begin{cases} 0 & x < c^2 t \\ 1 & x > c^2 t \end{cases}}$$

Vemos que esto nos recuerda a un problema de Riemann, y aplicando la condición de salto de Rankine-Hugoniot al modelo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

con $f(u) = c^2 u$, el valor de λ visto en teoría es, teniendo en cuenta que $u^- = 0$ y $u^+ = 1$:

$$\lambda = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{c^2 \cdot 1 - c^2 \cdot 0}{1 - 0} = c^2$$

Dicho lo anterior, definimos el concepto de solución débil. Primero vemos que $\omega \in L^\infty_{loc}([0,T[\times \mathbb{R})$ y $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Lo primero por ser ω continua, por lo que está acotada en compactos por el Teorema de Weierstrass, y por tanto, es integrable en compactos, es decir, localmente integrable. Lo segundo porque u_0 está acotada, pues $|u_0(x)| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ya que toda función acotada es integrable sobre compactos, o sea, localmente integrable. Así, una solución débil de (1) es una función $u \in L^1_{loc}([0,T[\times \mathbb{R}^N)$ que verifica

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\omega \cdot \nabla_x)\varphi\right] u \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x) \, dx$$

para todo $\varphi \in C^1_c([0,T[\times \mathbb{R}^N)$. En nuestro caso, $N = 1$, $\omega(t,x) = c^2$ y $u_0(x)$ es el dato inicial de este ejercicio, luego u debe verificar

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} [\varphi_t + c^2\varphi_x] u \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x) \, dx = \cancelto{0}{\int_{-\infty}^0 0 \cdot \varphi(0,x) \, dx} + \int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi(0,x) \, dx =$$

$$\int_0^{+\infty} \varphi(0,x) \, dx$$

para todo $\varphi \in C^1_c([0,T[\times \mathbb{R})$. Resumidamente, u debe verificar

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} [\varphi_t + c^2\varphi_x] u \, dx \, dt = \int_0^{+\infty} \varphi(0,x) \, dx$$

para todo $\varphi \in C^1_c([0,T[\times \mathbb{R})$.

Ejercicio 3. Calcule las ondas de choque de la ecuación de Burgers asociada a

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

En primer lugar obtenemos las trayectorias características:

$$X(t;0,x) = x + u_0(x)t = \begin{cases} x & x < 0 \\ x + t/2 & 0 < x < 1 \\ x + t & x > 1 \end{cases}$$

Estudiamos por separado las dos discontinuidades del dato inicial. El primer dato inicial que consideramos es

$$u_1(0,x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Y aplicando la condición de salto de Rankine-Hugoniot obtenemos que

$$\lambda = \frac{1}{2}(u_1^+ + u_1^-) = \frac{1}{4}$$

Por lo que una primera solución sería

$$u_1(t,x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{t}{4} \\ 1/2 & x > \frac{t}{4} \end{cases}$$

Análogamente, el segundo inicial considerado es

$$u_2(0,x) = \begin{cases} 1/2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Y aplicando la condición de salto de Rankine-Hugoniot obtenemos que

$$\lambda = \frac{1}{2}(u_2^+ + u_2^-) = \frac{3}{4}$$

Por lo que una segunda solución sería

$$u_2(t,x) = \begin{cases} 1/2 & x < \frac{3t}{4} + 1 \\ 1 & x > \frac{3t}{4} + 1 \end{cases}$$

En conclusión, la solución conjunta sería

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{t}{4} \\ 1/2 & \frac{t}{4} < x < \frac{3t}{4} + 1 \\ 1 & x > \frac{3t}{4} + 1 \end{cases}$$

Además, las rectas no se cortan para $t \geqslant 0$, puesto que

$$\frac{t}{4} = 1 + \frac{3t}{4} \iff t = -2$$

Por tanto, la expresión a la que hemos llegado es válida para todo $t \geqslant 0$.