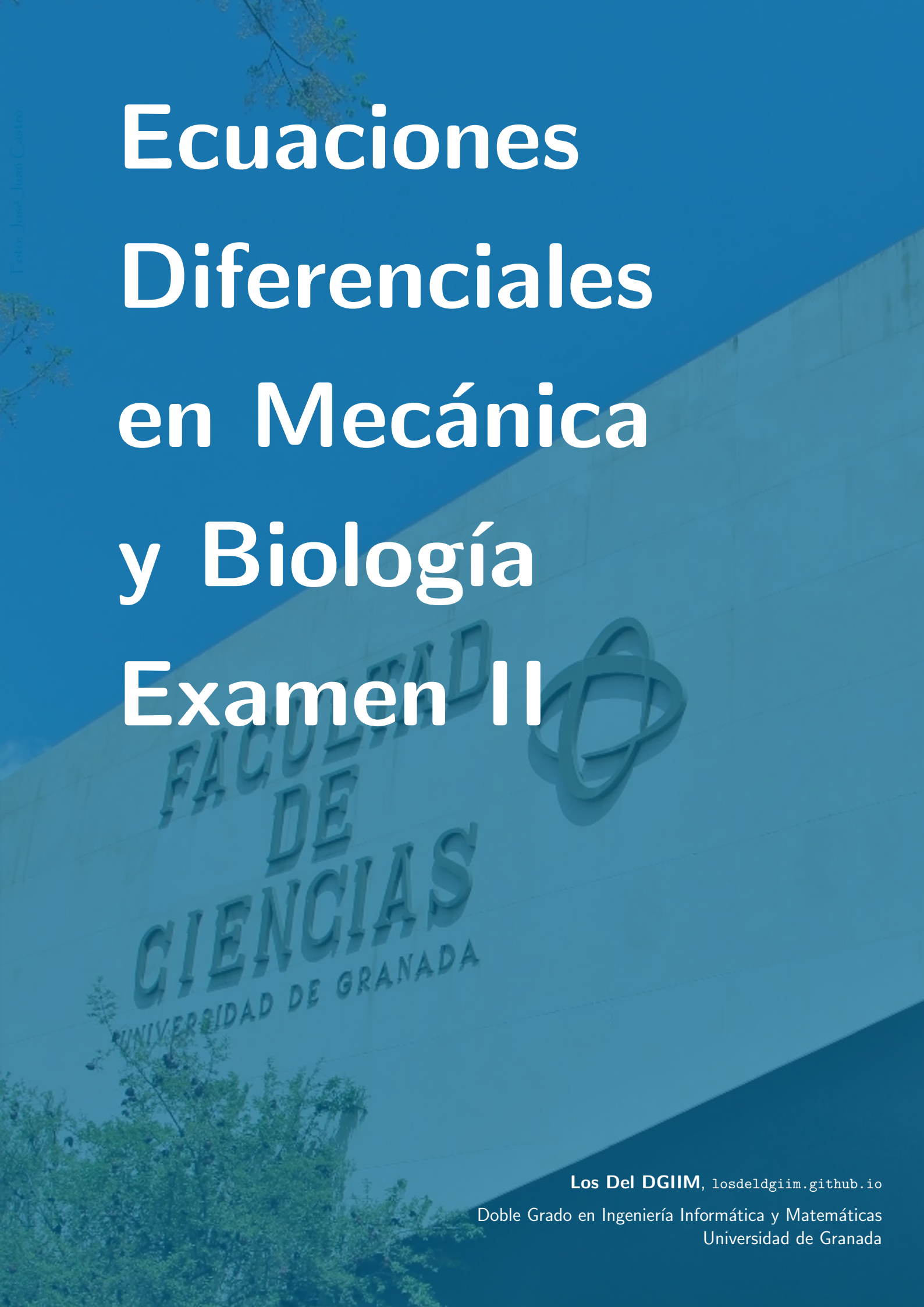
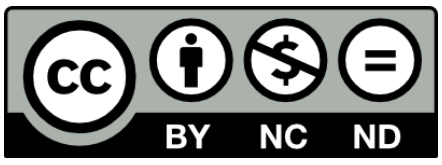
Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología Examen II



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Parcial 1.

Ejercicio 1. Sea $u_t + tu_x = 0$, con $u : [0, T[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demuestra que u se conserva a lo largo de las trayectorias características.

Ejercicio 2. Resolver

$$\begin{cases} u_t + e^x u_x = 0 \\ u(0, x) = x \end{cases}$$

Ejercicio 3. Calcular las ondas de choque y rarefacción del problema de Riemann

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Solución.

Ejercicio 1. Sea $u_t + tu_x = 0$, con $u : [0, T[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demuestra que u se conserva a lo largo de las trayectorias características.

Obtenemos en primer lugar las trayectorias características. En este caso, $\omega(t, x) = t$. El sistema característico asociado al modelo de transporte es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t; s, x) = \omega(t, X(t; s, x)) = t \\ X(s; s, x) = x \end{cases} \qquad s \in [0, T[$$

Para ver que u se conserva a lo largo de las trayectorias características, primeramente hay ver que

$$\frac{d}{dt} u(t, X(t; s, x)) = 0$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} u(t, X(t; s, x)) = u_t(t, X(t; s, x)) + u_x(t, X(t; s, x)) \frac{\partial X}{\partial t}(t; s, x)$$

Usando que u verifica la ecuación del enunciado, sustituyendo x por $X(t; s, x)$ se tiene que

$$u_t(t, X(t; s, x)) + t\, u_x(t, X(t; s, x)) = 0$$

y como

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t; s, x) = \omega(t, X(t; s, x)) = t$$

por ser una trayectoria característica, nos queda lo que queremos probar:

$$\frac{d}{dt} u(t, X(t; s, x)) = 0$$

Deducimos entonces que la función $t \mapsto u(t, X(t; s, x))$ es constante, luego

$$u(t, X(t; s, x)) = u(s, X(s; s, x)).$$

Y como $X(s; s, x) = x$, nuevamente por ser trayectoria característica, llegamos al resultado

$$\boxed{u(t, X(t; s, x)) = u(s, x) \quad \forall t, s \in [0, T[\quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Así, el valor de u permanece constante a lo largo de cada trayectoria característica (toma el valor del instante inicial s). Por tanto, u se conserva a lo largo de dichas trayectorias, como queríamos demostrar.

Ejercicio 2. Resolver

$$\begin{cases} u_t + e^x u_x = 0 \\ u(0,x) = x \end{cases} \tag{1}$$

Sabemos por los dos teoremas vistos en clase correspondientes, que tanto la teoría clásica como la teoría débil nos proporcionan existencia y unicidad de soluciones de (1), y, en caso de verificarse todas las hipótesis, dicha solución única es

$$u(t,x) = u_0(X(0;t,x))$$

Sin embargo, en este problema concreto, el teorema para las soluciones clásicas no nos sirve, ya que (H3) no se verifica, puesto que $\omega(t,x) = |e^x|$ no tiene crecimiento sublineal. Tampoco podemos aplicar el teorema para las soluciones débiles, puesto que:

$$\operatorname{div}_x(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial x}(t,x) = e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Aún así, tratamos de buscar una solución a (1) que tenga la misma forma que la que nos proporcionan ambos teoremas, y luego verificar que sea solución. Así, buscamos una solución de la forma que hemos dicho al principio. En este caso, $u_0(x) = x$. El sistema característico asociado a (1) es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t;s,x) = \omega(t, X(t;s,x)) = e^{X(t;s,x)} \\ X(s;s,x) = x \end{cases} \qquad s \in [0,T[$$

La primera ecuación se resuelve por variables separadas (escribimos $X(t) \equiv X(t;s,x)$):

$$\frac{dX}{dt} = X' = e^X \Longrightarrow e^{-X} dX = \frac{dX}{e^X} = dt \Longrightarrow -e^{-X(t)} = t + C \Longrightarrow$$

$$e^{-X(t)} = -t - C \Longrightarrow -X(t) = \ln(-t-C) \Longrightarrow X(t) = -\ln(-t-C) \quad C \in \mathbb{R}$$

e imponiendo la condición inicial $X(s) = x$:

$$-\ln(-s-C) = X(s) = x \Longrightarrow \ln(-s-C) = -x \Longrightarrow -s-C = e^{-x} \Longrightarrow C = -s-e^{-x}$$

luego

$$X(t;s,x) = -\ln(-t-(-s-e^{-x})) = -\ln(e^{-x}+s-t)$$

Vemos que esta expresión solo está definida cuando el argumento del logaritmo es positivo, es decir,

$$e^{-x} + s - t > 0 \iff t < s + e^{-x}$$

Esto significa que las trayectorias características no están necesariamente definidas para todo $t \in [0,T[$, lo cual está relacionado con que no se cumpla (H3). Como $X(0;t,x) = -\ln(e^{-x}+t)$, la "solución" a la que llegamos de (1) es

$$\boxed{u(t,x) = u_0(X(0;t,x)) = X(0;t,x) = -\ln(e^{-x}+t)}$$

Veamos si en efecto es solución. Calculamos:

$$u_t(t,x) = -\frac{1}{e^{-x}+t}$$

y

$$u_x(t,x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+t}$$

Luego,

$$u_t + e^x u_x = -\frac{1}{e^{-x}+t} + \frac{e^x e^{-x}}{e^{-x}+t} = 0$$

Además,

$$u(0,x) = -\ln(e^{-x}) = x$$

Así, hemos resuelto (1), como se pedía.

Ejercicio 3. Calcular las ondas de choque y rarefacción del problema de Riemann

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Sabemos por teoría que las soluciones de la ecuación de Burgers (las trayectorias características) son rectas, donde la pendiente la determina la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$, o sea, $X(t;0,x) = x + u_0(x)t$. Así pues:

$$X(t;0,x) = \begin{cases} x - t & x < 0 \\ x + t & x > 0 \end{cases}$$

Una solución débil del problema de Riemann (que es el problema de Burgers con un dato inicial con salto) que conocemos es la siguiente:

$$u_1(t,x) = \begin{cases} u^- & x < \lambda t \\ u^+ & x > \lambda t \end{cases}$$

donde $u^- = -1$ y $u^+ = 1$ se obtienen del dato inicial. Se ha visto en teoría que el único valor de λ para que u sea solución (débil) es, aplicando la condición de salto de Rankine-Hugoniot:

$$\lambda = \frac{1}{2}(u^- + u^+) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$$

por lo que ya tenemos una solución del problema de Riemann:

$$\boxed{u_1(t,x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}}$$

Como además el dato inicial $u_0(x)$ es creciente, sabemos por teoría que tendremos también ondas de rarefacción. Las características ya las hemos obtenido:

$$X(t;0,x) = \begin{cases} x - t & x < 0 \\ x + t & x > 0 \end{cases}$$

Obtenemos las rectas que delimitan la región de las ondas de rarefacción haciendo $x \to 0$ en ambos lados, y vemos que:

$$\lim_{x \to 0^-} X(t;0,x) = -t$$

$$\lim_{x\to 0^+} X(t;0,x) = t$$

Así, las fronteras de la región de rarefacción son $x = -t$ y $x = t$. Las tres regiones que tenemos son $x < -t$, $-t \leqslant x \leqslant t$ y $x > t$. Según se ha visto en teoría, las ondas de rarefacción pueden construirse como la solución autosemejante o autosimilar $u(t,x) = x/t$, y teniendo en cuenta los límites ya obtenidos de la región de rarefacción, una segunda solución (en este caso continua para $t > 0$) del problema de este ejercicio es:

$$\boxed{u_2(t,x) = \begin{cases} -1 & x < -t \\ \dfrac{x}{t} & -t \leqslant x \leqslant t \quad t > 0 \\ 1 & x > t \end{cases}}$$

En $t = 0$ tenemos la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$.