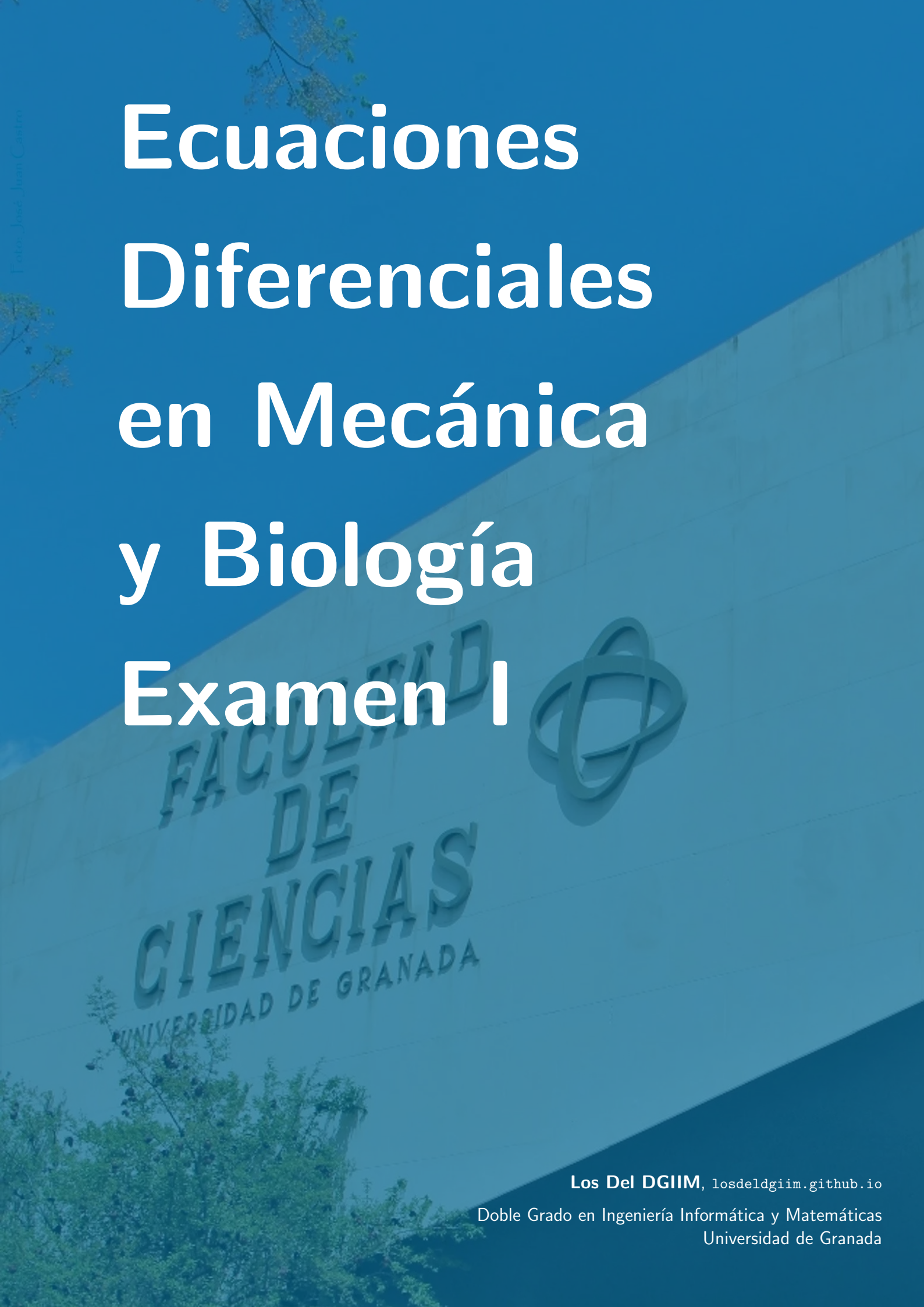
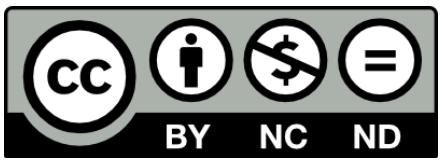
Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología Examen I



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales en Mecánica y Biología.

Curso Académico 2022-23.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Parcial 1.

Ejercicio 1. Define el concepto de solución débil para el problema:

$$\begin{cases} u_t + (\omega \cdot \nabla_x) = 0 & \omega_i \in L^\infty_{loc}([0,T[\times \mathbb{R}^N) \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ u(0,x) = u_0(x) & u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Ejercicio 2. Resuelve el problema de valores iniciales unidimensional

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - tx\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u_0(x) = x^2 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Calcular las ondas de choque y de rarefacción del problema de Riemman asociado a la ecuación de Burgers con dato inicial:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

Solución.

Ejercicio 1. Define el concepto de solución débil para el problema:

$$\begin{cases} u_t + (\omega \cdot \nabla_x) = 0 & \omega_i \in L^\infty_{loc}([0,T[\times \mathbb{R}^N) \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ u(0,x) = u_0 & u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1}$$

Partimos de que $\omega_i \in L^\infty_{loc}([0,T[\times \mathbb{R}^N) \quad 1 \leqslant i \leqslant N$, y $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Así, una solución débil de (1) es una función $u \in L^1_{loc}([0,T[\times \mathbb{R}^N)$ que verifica

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\omega \cdot \nabla_x)\varphi \right] u \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x) \, dx$$

para todo $\varphi \in C^1_c([0,T[\times \mathbb{R}^N)$.

Ejercicio 2. Resuelve el problema de valores iniciales unidimensional

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - tx\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u_0(x) = x^2 \end{cases} \tag{2}$$

Sabemos por los dos teoremas vistos en clase correspondientes, que tanto la teoría clásica como la teoría débil nos proporcionan existencia y unicidad de soluciones de (2), y, en caso de verificarse todas las hipótesis, dicha solución única es

$$u(t,x) = u_0(X(0;t,x))$$

Veamos primero las hipótesis para obtener la solución por la vía clásica. En este caso, $\omega(t,x) = -tx$, y $u_0(x) = x^2$. Primero vemos que se verifican (H1)-(H4):

(H1) Se cumple porque $\omega(t,x)$ es polinómica en las variables t y x, en particular ω es continua en los dos argumentos.

(H2) ω es localmente Lipschitz respecto de x, ya que $\omega \in C^1([0,T[\times \mathbb{R})$, luego $C^1_x([0,T[\times \mathbb{R})$, y sabemos por un resultado visto en Ecuaciones Diferenciales II que es l.l. resp. de x. Otra forma sería verlo por definición directamente: para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|\omega(t,x) - \omega(t,y)| = |t||x-y| \leqslant T|x-y|$$

para cualquier entorno de (t,x) y (t,y) de la forma $I \times \mathbb{R}$, con $I \subseteq [0,T[$ un intervalo acotado.

(H3) Como $\omega(t,x) = -tx$, en particular,

$$|\omega(t,x)| \leqslant |t||x| + 0 < T|x| + 0 = A|x| + B$$

para todo $(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}$, por lo que el crecimiento es sublineal.

(H4) La aplicación

$$\begin{array}{rccl} \dfrac{\partial \omega}{\partial x}: & [0,T[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & \dfrac{\partial \omega}{\partial x}(t,x) = -t \end{array}$$

es polinómica en t, luego continua.

Como además es claro que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, el teorema mencionado al principio nos dice que el PVI (2) admite una única solución, $u \in C^1([0,T[\times \mathbb{R})$, que viene dada por

$$u(t,x) = u_0(X(0;t,x))$$

El sistema característico asociado a (2) es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t;s,x) = \omega(t, X(t;s,x)) = -tX(t;s,x) \\ X(s;s,x) = x \end{cases} \qquad s \in [0,T[$$

La primera ecuación se resuelve por variables separadas (escribimos $X(t) \equiv X(t;s,x)$), suponiendo en todo momento que $X \neq 0$:

$$\frac{dX}{dt} = X' = -tX \Longrightarrow \frac{dX}{X} = -tdt \Longrightarrow \ln|X(t)| = -\frac{t^2}{2} + C \Longrightarrow X(t) = Ke^{-t^2/2} \quad K \in \mathbb{R}$$

Vemos que si $K = 0$ recuperamos la solución $X = 0$. Imponiendo la condición inicial $X(s) = x$:

$$Ke^{-s^2/2} = X(s) = x \Longrightarrow K = xe^{s^2/2}$$

luego

$$X(t;s,x) = xe^{s^2/2}e^{-t^2/2} = xe^{\frac{s^2-t^2}{2}}$$

y como $X(0;t,x) = xe^{\frac{t^2}{2}}$, la única solución clásica de (2) es

$$\boxed{u(t,x) = u_0(X(0;t,x)) = \left(xe^{\frac{t^2}{2}}\right)^2 = x^2e^{t^2}}$$

Respecto a la vía débil, a raíz de (H4) vemos que no podemos aplicar el teorema correspondiente, ya que

$$\mathrm{div}_x(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial x}(t,x) = -t \neq 0 \text{ si } t > 0$$

Ejercicio 3. Calcular las ondas de choque y de rarefacción del problema de Riemman asociado a la ecuación de Burgers con dato inicial:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

Sabemos por teoría que las soluciones de la ecuación de Burgers (las trayectorias características) son rectas, donde la pendiente la determina la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$, o sea, $X(t;0,x) = x + u_0(x)t$. Así pues:

$$X(t;0,x) = \begin{cases} x + t & x < 0 \\ x + 3t & x > 0 \end{cases}$$

Una solución débil del problema de Riemann (que es el problema de Burgers con un dato inicial con salto) que conocemos es la siguiente:

$$u_1(t,x) = \begin{cases} u^- & x < \lambda t \\ u^+ & x > \lambda t \end{cases}$$

donde $u^- = 1$ y $u^+ = 3$ se obtienen del dato inicial. Se ha visto en teoría que el único valor de λ para que u sea solución (débil) es, aplicando la condición de salto de Rankine-Hugoniot:

$$\lambda = \frac{1}{2}(u^- + u^+) = \frac{1}{2}(1+3) = 2$$

por lo que ya tenemos una solución del problema de Riemann:

$$\boxed{u_1(t,x) = \begin{cases} 1 & x < 2t \\ 3 & x > 2t \end{cases}}$$

Como además el dato inicial $u_0(x)$ es creciente, sabemos por teoría que tendremos también ondas de rarefacción. Las características ya las hemos obtenido:

$$X(t;0,x) = \begin{cases} x + t & x < 0 \\ x + 3t & x > 0 \end{cases}$$

Obtenemos las rectas que delimitan la región de las ondas de rarefacción haciendo $x \to 0$ en ambos lados, y vemos que:

$$\lim_{x \to 0^-} X(t;0,x) = t$$

$$\lim_{x \to 0^+} X(t;0,x) = 3t$$

Así, las fronteras de la región de rarefacción son $x = t$ y $x = 3t$. Las tres regiones que tenemos son $x < t$, $t \leqslant x \leqslant 3t$ y $x > 3t$. Según se ha visto en teoría, las ondas de rarefacción pueden construirse como la solución autosemejante o autosimilar $u(t,x) = x/t$, y teniendo en cuenta los límites ya obtenidos de la región de rarefacción, una segunda solución (en este caso continua para $t > 0$) del problema de este ejercicio es:

$$\boxed{u_2(t,x) = \begin{cases} 1 & x < t \\ \dfrac{x}{t} & t \leqslant x \leqslant 3t \quad t > 0 \\ 3 & x > 3t \end{cases}}$$

En $t = 0$ tenemos la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$.